

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Respeite as margens do papel!
4. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
5. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
6. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

- 1 [15] Escreva a equação $r = 2 \cos(\theta) - \sin(\theta)$ em coordenadas cartesianas e simplifique.

Sabemos que a relação entre as coordenadas é

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} \quad \sin(\theta) = \frac{y}{r} \quad r^2 = x^2 + y^2$$

Portanto, precisamos substituir as expressões e simplificar o resultado

$$r = 2 \cos(\theta) - \sin(\theta)$$

$$r = 2 \frac{x}{r} - \frac{y}{r}$$

$$r = \frac{2x - y}{r}$$

$$r^2 = 2x - y$$

$$x^2 + y^2 = 2x - y$$

$$x^2 + y^2 - 2x + y = 0$$

2 [10] Encontre o corte da quádrlica $z^2 + 4y^2 - 4x^2 = 4$ pelo plano $z = 0$, identifique a região e a esboce no plano.

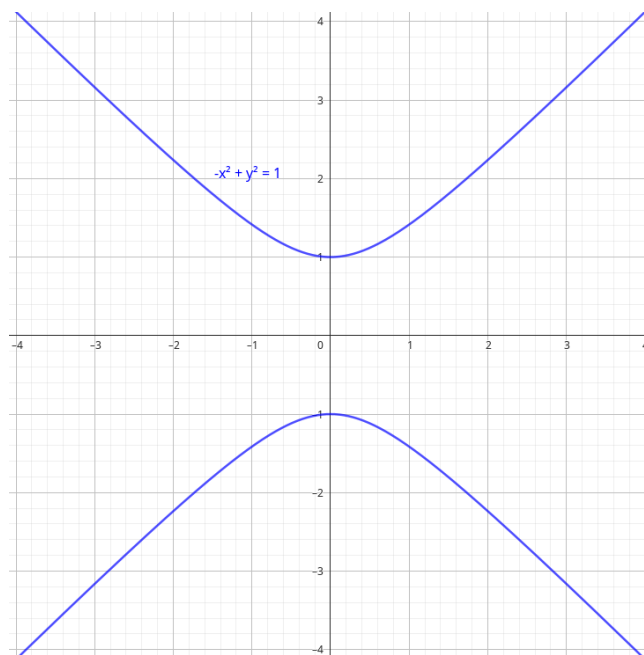
Encontramos o corte substituindo $z = 0$ na equação

$$z^2 + 4y^2 - 4x^2 = 4$$

$$4y^2 - 4x^2 = 4$$

$$y^2 - x^2 = 1$$

Essa é a expressão da **hipérbole** ilustrada a seguir



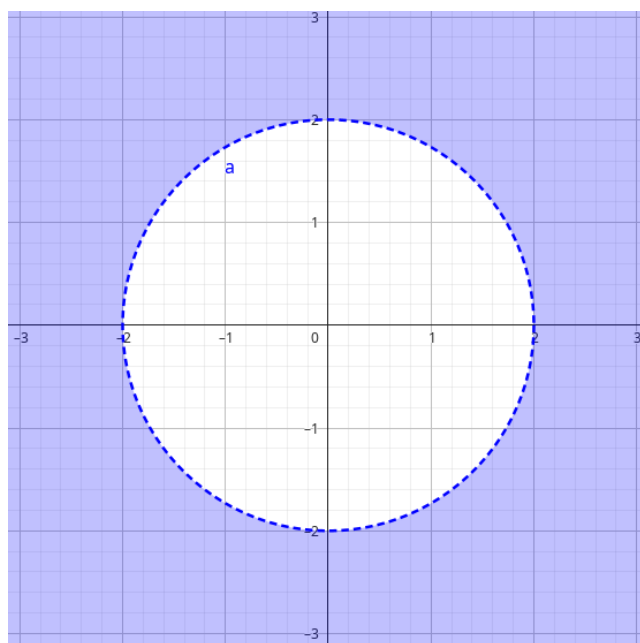
3 [15] Determine e esboce o domínio da função $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$

O logaritmo só está definido para valores estritamente maiores do que zero, assim seu domínio consiste dos pontos que satisfaçam a condição

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 4 &> 0 \\x^2 + y^2 &> 4\end{aligned}$$

isso é, os pontos externos a circunferência de raio 2 centrada na origem

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 > 4\}$$



4 [30] Calcule os limites solicitados, ou prove que o limite não existe

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2}$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{|xy|}$

a) Se tentarmos calcular diretamente a fração obtemos uma indeterminação $0/0$. Portanto, precisamos remover a indeterminação manipulando algebricamente a função, assumindo que $(x, y) \neq (2, 2)$, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2} \\ &= \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2} \times \frac{\sqrt{x+y}+2}{\sqrt{x+y}+2} \\ &= \frac{(x+y-4)(\sqrt{x+y}+2)}{(\sqrt{x+y})^2 - 2^2} \\ &= \frac{(x+y-4)(\sqrt{x+y}+2)}{x+y-4} \\ &= \sqrt{x+y}+2 \end{aligned}$$

Onde o cancelamento só foi possível, pois $(x, y) \neq (2, 2)$. Agora podemos calcular o limite, pois temos uma função contínua em $(2, 2)$,

$$\begin{aligned} L &= \lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \sqrt{x+y}+2 \\ &= \sqrt{2+2}+2 = \sqrt{4}+2 = 4 \end{aligned}$$

b) Analisando a função percebemos que se fizermos $y = x$ o limite restrito a curva será

$$L_1 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{xy}{|xy|} \Big|_{y=x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x^2|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Por outro lado, escolhendo $y = -x$ temos

$$L_2 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{xy}{|xy|} \Big|_{y=-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{|-x^2|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

Como $L_1 \neq L_2$ o limite não existe.

5 [30] Calcule as derivadas solicitadas realizando as contas na ordem indicada

$$\text{a) } \frac{\partial}{\partial y} y^2 \ln \left(\frac{2x}{3y} \right) \qquad \text{b) } \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \text{sen}(xy)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \quad \frac{\partial}{\partial y} y^2 \ln \left(\frac{2x}{3y} \right) &= \frac{\partial y^2}{\partial y} \ln \left(\frac{2x}{3y} \right) + y^2 \frac{\partial}{\partial y} \ln \left(\frac{2x}{3y} \right) \\ &= 2y \ln \left(\frac{2x}{3y} \right) + y^2 \left(\frac{2x}{3y} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{2x}{3y} \\ &= 2y \ln \left(\frac{2x}{3y} \right) + y^2 \frac{3y}{2x} \frac{2x}{3} \frac{\partial y^{-1}}{\partial y} \\ &= 2y \ln \left(\frac{2x}{3y} \right) + y^3 \frac{\partial y^{-1}}{\partial y} \\ &= 2y \ln \left(\frac{2x}{3y} \right) + y^3 (-1) y^{-2} \\ &= 2y \ln \left(\frac{2x}{3y} \right) - y \\ &= y \left(2 \ln \left(\frac{2x}{3y} \right) - 1 \right) \end{aligned}$$

b) Começamos calculando a primeira derivada

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \text{sen}(xy) &= \cos(xy) \frac{\partial}{\partial y} (xy) \\ &= \cos(xy) x \frac{\partial y}{\partial y} \\ &= x \cos(xy) \end{aligned}$$

Agora calculamos a derivada segunda

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \text{sen}(xy) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \text{sen}(xy) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (x \cos(xy)) \\ &= \frac{\partial x}{\partial x} \cos(xy) + x \frac{\partial}{\partial x} \cos(xy) \\ &= \cos(xy) - x \text{sen}(xy) \frac{\partial}{\partial x} (xy) \\ &= \cos(xy) - x \text{sen}(xy) y \frac{\partial x}{\partial x} \\ &= \cos(xy) - xy \text{sen}(xy) \end{aligned}$$