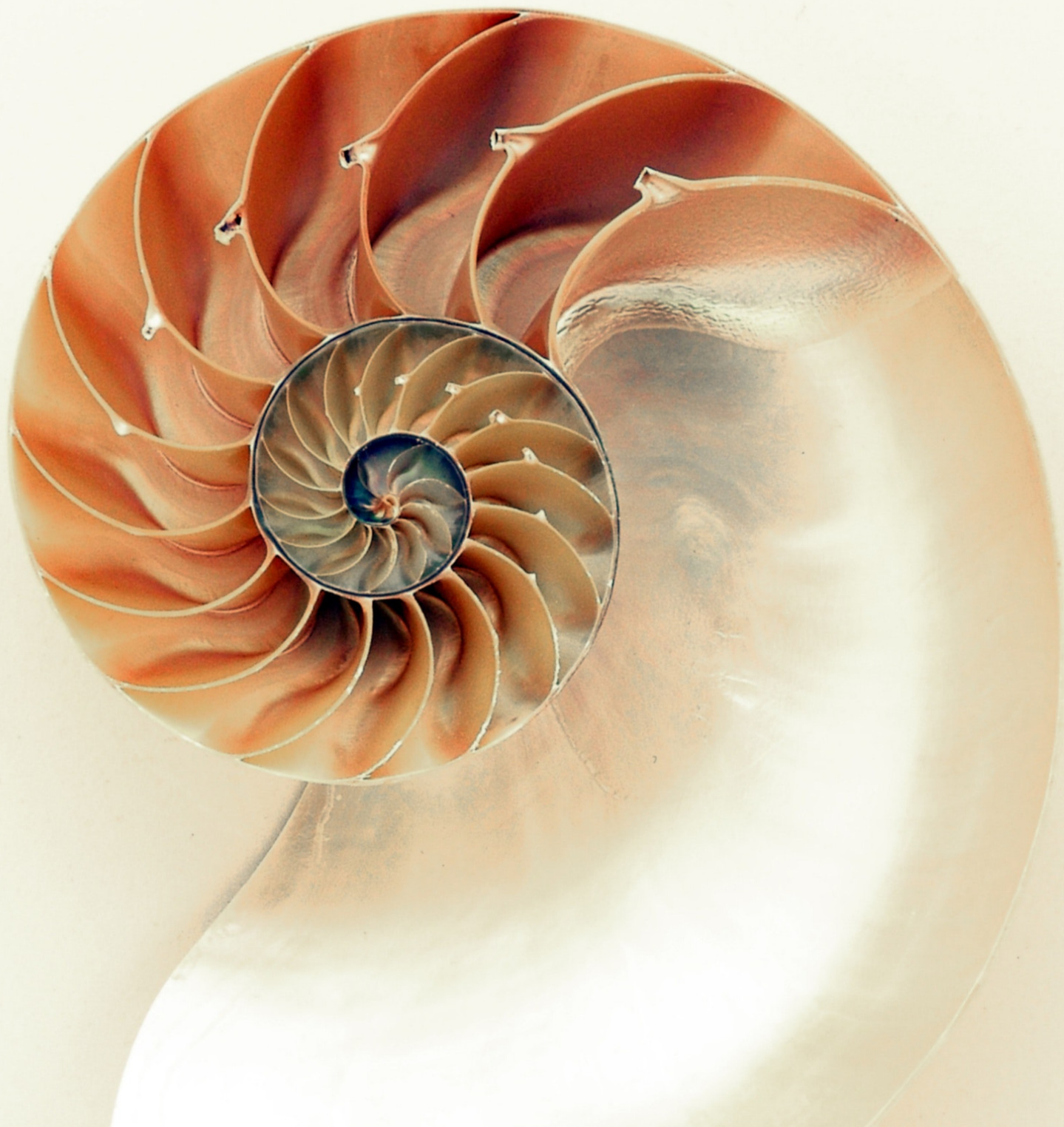




# QUEM DISSE QUE $0,999\ldots = 1$ ?

Pierre Simon de Fermat Vieira  
Luis Alberto D'Afonseca  
Sandra Mara Alves Jorge

# Quem disse que $0,999\ldots = 1$ ?

Pierre Simon de Fermat Vieira

Luis Alberto D'Afonseca

Sandra Mara Alves Jorge

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET-MG

30 de agosto de 2023

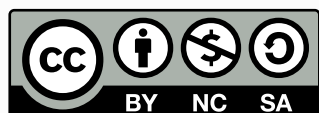
Esta apostila é produto do mestrado de Pierre Simon de Fermat Vieira defendida em 2023 no Profmat do Cefet-MG [7].



A versão mais recente desta apostila pode ser baixada clicando ou escaneando o código QR.

Arte da capa: [Fotografia de Pixabay](#) baixada de [Pexels](#)

Ilustrações baseadas em designs de [macrovector\\_oficial](#) – [Freepik](#)



Essa obra tem a licença [Creative Commons “Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 4.0 Internacional”](#).

# Sumário

|                                            |           |
|--------------------------------------------|-----------|
| <b>Prefácio</b>                            | <b>1</b>  |
| <b>1 O Infinito</b>                        | <b>3</b>  |
| 1.1 O que é o infinito? . . . . .          | 3         |
| 1.2 Grécia Antiga . . . . .                | 5         |
| 1.3 Idade Média . . . . .                  | 10        |
| 1.4 Idade Moderna . . . . .                | 13        |
| 1.5 Idade Contemporânea . . . . .          | 16        |
| <b>2 Números Para Contar</b>               | <b>21</b> |
| 2.1 Como contar matematicamente? . . . . . | 21        |
| 2.2 Conjuntos . . . . .                    | 22        |
| 2.3 Operações entre Conjuntos . . . . .    | 30        |
| 2.4 Funções . . . . .                      | 35        |
| 2.5 Conjuntos Finitos . . . . .            | 43        |
| 2.6 Conjuntos Infinitos . . . . .          | 51        |
| <b>3 Números Para Medir</b>                | <b>58</b> |
| 3.1 Por que medir? . . . . .               | 58        |
| 3.2 Números Racionais . . . . .            | 59        |
| 3.3 Números Reais . . . . .                | 68        |

|          |                              |            |
|----------|------------------------------|------------|
| <b>4</b> | <b>Calculando o Infinito</b> | <b>76</b>  |
| 4.1      | Introdução . . . . .         | 76         |
| 4.2      | Sequências . . . . .         | 77         |
| 4.3      | Séries . . . . .             | 98         |
|          | <b>Considerações Finais</b>  | <b>111</b> |
|          | <b>Referências</b>           | <b>113</b> |
|          | <b>Índice Remissivo</b>      | <b>114</b> |

# Prefácio

Esta apostila é fruto de uma intensa jornada de pesquisa e se constitui como produto central do trabalho de conclusão do Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional, o Profmat. Quando eu e meus orientadores começamos a escrevê-la, ainda que meus anseios pessoais me conduzissem nas buscas pelo conhecimento acerca do infinito, não esperava eu me deparar com tantas surpresas. Dedicar-me a uma pesquisa cujo objetivo central consistia em encontrar respostas que justificassem a natureza e existência do infinito foi particularmente um processo de grande crescimento pessoal. Mesmo que pareça egoísmo (e talvez seja), minha principal motivação ao desenvolver estes estudos foi primeiramente a de dar respostas à mim mesmo. Paralelamente a isso, minha experiência como discente e professor me permitiu perceber que as razões que me trouxeram até aqui também são objetos de questionamentos e curiosidade de muitos dos meus colegas e alunos. Dessa forma, esta apostila foi cuidadosamente elaborada com o propósito de auxiliar alunos e professores do ensino médio que, assim como eu, têm interesse em explorar as profundezas fascinantes do infinito matemático.

Ao longo dos cinco capítulos que compõem esta apostila, embarcaremos em uma empolgante viagem através da história e das diferentes facetas do infinito. O primeiro capítulo, intitulado “[O Infinito](#)”, nos levará a uma jornada pelos séculos, explorando a evolução desse conceito desde a antiga Grécia até os tempos contemporâneos. No segundo capítulo, “[Números Para Contar](#)”, adentraremos no universo dos conjuntos e das funções, que serão fundamentais para a compreensão dos conjuntos numéricos infinitos que aqui iremos construir. A partir daí, no terceiro capítulo, “[Números Para Medir](#)”, mergulharemos no oceano dos conjuntos infinitos contínuos, ampliando ainda mais nossos conhecimentos. No capítulo seguinte, “[Calculando o Infinito](#)”, daremos entrada numa pequena seção do mundo do cálculo diferencial, explorando os conceitos de limites e de infinitesimais e a manipulação do infinito. Aqui, serão trabalhadas as ideias de limites de sequências e séries, fundamentais para a compreensão de fenômenos complexos e aprofundados do infinito.

Este texto foi produzido com a intenção de se diferenciar dos demais materiais didáticos que encontramos nas escolas. Dentro do que julgamos adequado para este nível ensino, buscamos apresentar e discutir os resultados com maior rigor e formalidade matemática. O intuito não é o de deixar o texto mais complexo e de difícil compreensão, mas sim o de experimentar uma matemática diferente daquela apresentada em sala de aula.

É esperado que os leitores dessa apostila possuam certa familiaridade com os conteúdos trabalhados no ensino médio para que exista um maior aproveitamento da nossa proposta. No entanto, mesmo que você ainda não esteja familiarizado com esses conceitos, encorajamos você a se aventurar neste material, pois ele foi elaborado de forma didática e acessível, com o objetivo de guiar o leitor ao longo de cada passo.

Nosso maior desejo é que esta apostila seja uma ferramenta valiosa tanto para alunos ávidos em expandir seus horizontes matemáticos quanto para professores que desejam oferecer um recurso enriquecedor em suas salas de aula. Esperamos que ele desperte a curiosidade, estimule a reflexão e inspire novas descobertas sobre o infinito matemático.

Esteja preparado para desbravar o desconhecido, desafiar os limites e se maravilhar com as infinitas possibilidades que a matemática oferece.

Desejamos uma jornada incrível e infinitamente gratificante!

# O Infinito

---

|     |                     |    |
|-----|---------------------|----|
| 1.1 | O que é o infinito? | 3  |
| 1.2 | Grécia Antiga       | 5  |
| 1.3 | Idade Média         | 10 |
| 1.4 | Idade Moderna       | 13 |
| 1.5 | Idade Contemporânea | 16 |

---

## 1.1 O que é o infinito?

---

No senso comum, a concepção do infinito é frequentemente compreendida como algo imensurável, insondável e além de qualquer limite ou fronteira. Essa ideia evoca um sentimento de grandiosidade e abstração que transcende a nossa compreensão racional. O infinito é muitas vezes associado a conceitos como a eternidade, a vastidão do universo ou a percepção contínua do tempo. Essa concepção popular do infinito também pode ser encontrada em metáforas e expressões cotidianas, como por exemplo em frases do tipo “o meu amor por você é infinito”, ressaltando a sua imensidão e perenidade. Ainda que essa noção do infinito no senso comum possa não corresponder estritamente à compreensão matemática ou filosófica, ela desempenha um papel significativo na forma como as pessoas percebem o mundo e buscam dar sentido a questões existenciais que transcendem os limites da nossa compreensão racional.

## O bêbado e a garrafa mágica

Certa vez, um bêbado, já em alta madrugada, ia cambaleando pelas ruas estreitas a caminho de casa quando num de seus inúmeros tropeços embarçou as pernas num pequeno objeto dourado encostado rente ao meio fio. Para surpresa do bêbado, tratava-se de uma bela lâmpada mágica. De dentro da lâmpada surge um gênio de voz imponente que exclama:

— Eu sou o gênio da lâmpada e por me libertar você tem direito a três desejos!

O bêbado mais que depressa devolveu:

— Se o senhor tá falando, ic, ... então eu deeeee. . . seja uma gar. . . garrafa de cachaça que não acaba nunca!

— Seu desejo é uma ordem! — disse o gênio fazendo aparecer uma garrafa brilhante.

O bêbado deu várias goladas e viu que realmente o conteúdo da garrafa não se alterava.

— Pois bem! — completou o gênio.

— Agora diga, quais são seus outros dois desejos?

O bêbado admirado com a garrafa que havia recebido responde:

— Ic, seu gênio, me vê looooo. . . go mais duas dessas, porque é da boa!



O diálogo acima, apesar de cômico, nos incomoda pela a atitude do bêbado. Talvez, se a sobriedade do mesmo não estivesse comprometida pelos efeitos nocivos do álcool, os dois últimos desejos que lhe eram de direito poderiam ter sido melhor aproveitados, uma vez que não faz muito sentido pedir uma segunda garrafa (muito menos uma terceira) de mesmo conteúdo e propriedade semelhante à primeira. Entretanto, ainda que fictício, a intenção desse texto é ilustrar o quanto a ideia de infinito pode ser confusa.

A história do infinito na perspectiva matemática atravessa vários séculos e é carregada por inconsistências, indefinições, fragmentos e paradoxos. O interesse do homem pelo infinito provavelmente surgiu ao mesmo tempo em que ele questionou sua origem e sua existência e, apesar desse interesse percorrer uma extensa linha cronológica, poucos foram os estudiosos capazes de tratar o assunto de forma sistemática no intuito de responder ao questionamento: “O que é o Infinito?”

A percepção que cada um de nós tem com relação ao infinito é um tanto subjetiva e difícil de ser desconstruída, uma vez que não se trata de um objeto do mundo físico ou de uma apropriação material, mas de um produto do mundo das ideias. As primeiras concepções que temos acerca do infinito são construídas a partir de nossas próprias experiências. No que diz respeito à Matemática, nosso primeiro contato com o infinito surge quando começamos a desenvolver a ideia de quantificar as coisas. Desde a infância, nos é ensinado a contar e ordenar objetos e, nesse processo, apesar de não conseguirmos experimentar o infinito, é possível identificá-lo, pois quando contamos “um, dois, três, ...” sabemos que sempre existirá um próximo número.

Além da ideia de quantificar, o conceito de infinito é explorado em outras áreas da Matemática, como a teoria dos conjuntos e cálculo infinitesimal. No que diz respeito ao primeiro, a existência de conjuntos infinitos pode ser evidenciada, por exemplo, por meio da construção do conjunto dos números naturais. Já no que se refere ao cálculo infinitesimal, o infinito é tratado como um limite, permitindo-nos lidar com quantidades que tendem ao infinito ou se aproximam dele de maneiras específicas.

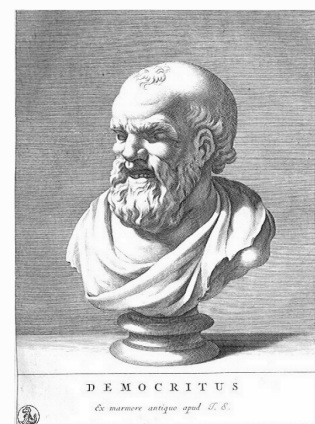
Neste capítulo, iremos discutir como o conceito de infinito foi sendo desenvolvido ao longo do tempo, quais conflitos matemáticos foram gerados a partir dos entendimentos preliminares que se praticavam acerca do assunto, entre eles o surgimento de alguns interessantes paradoxos, e quais foram os principais pensadores que se dedicaram à elaboração da forma como hoje entendemos esse conceito .

## 1.2 Grécia Antiga

---

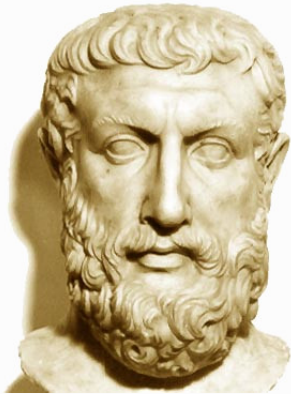
As primeiras manifestações que propunham um tratamento metodológico para as questões que envolviam o infinito surgem na Grécia antiga. Foram os gregos os primeiros responsáveis pela busca da compreensão dos fenômenos ligados ao infinito, ao contínuo e ao infinitésimo em busca de explicações que justificassem o movimento e as transformações dos seres [3].

**Demócrito** foi o autor da doutrina atomista que defendia que o tempo, o espaço e a matéria eram constituídos de átomos indivisíveis, invariáveis e eternos. Segundo ele, as coisas eram compostas de partículas



Demócrito  
460 a.C. – 370a.C.

infinitamente pequenas. Apesar dos egípcios, naquela época, já saberem calcular o volume da pirâmide de base quadrada, deve-se a Demócrito a generalização desse cálculo para pirâmides cuja base é um polígono qualquer e o cálculo do volume do cone. No caso do cone e do cilindro, Demócrito é o primeiro a falar e fazer uso da ideia de **infinitesimais** ao sugerir a utilização de lâminas circulares infinitamente finas para calcular seus volumes [3].



Parmênides de Eléia  
530 a.C. – 460 a.C.

Contrário às ideias de Demócrito, **Parmênides de Eleia** foi o fundador da Escola Eleata. A doutrina dessa escola se baseava na unicidade e imutabilidade do espaço, dos seres e de seus componentes. Segundo Parmênides, a pluralidade das coisas não passava de uma ficção. A razão se sobrepunha à observação, e mesmo que nossos sentidos fossem capazes de perceber as aparentes mutações das coisas, nada passava de ilusões, pois a realidade é imutável. A prática do pensamento dialético era a principal característica dos eleatas que faziam uso da contradição para refutar as ideias que criticavam.

Dentre os discípulos de Parmênides, destaca-se **Zenão de Eleia** que se contrapõe a ideia de infinitesimais e contra-argumenta os conceitos de multiplicidade e divisibilidade, em relação ao tempo e ao espaço, também defendidos pelos pitagóricos que acreditavam na máxima de que os números eram constituintes mínimos de todos os fenômenos, máxima esta que comunga da doutrina atomística de Demócrito.

Zenão escreveu uma série de paradoxos que buscavam argumentar sobre a inexistência do movimento [11]. Os quatro principais paradoxos de Zenão são intitulados como Dicotomia, Flecha, Aquiles e Estádio. Esses paradoxos estão descritos abaixo e ilustram com clareza a necessidade do entendimento sobre o conceito de infinito.

O **Paradoxo da Dicotomia** afirma que, se é proposto a um móvel percorrer determinada distância, primeiramente é necessário que este móvel alcance a metade desse espaço,



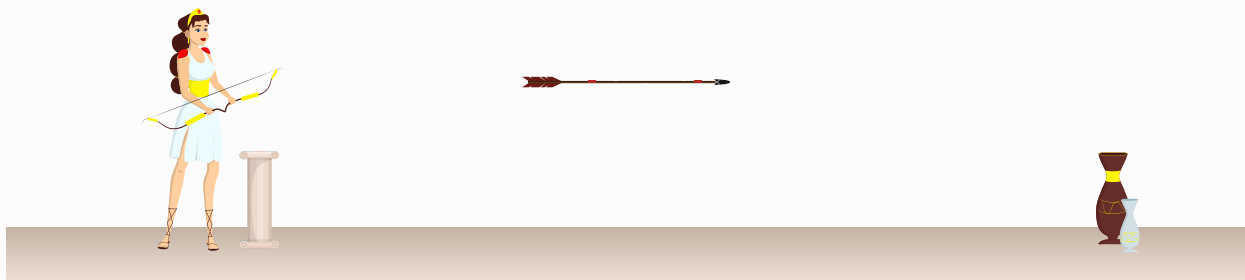
Zenão de Eléia  
490 a.C. – 430 a.C.



Paradoxo da dicotomia

mas antes disso, seria preciso percorrer a metade da metade desse espaço, e antes ainda, a metade da metade da metade, e assim por diante. Portanto, é possível concluir sob esses argumentos que o movimento jamais se iniciaria.

No **Paradoxo da Flecha** assumimos que o tempo é um conjunto de instantes atômicos indivisíveis, então, ao se atirar uma flecha em direção a um alvo, em cada um dos instantes em que a flecha viaja, ela estaria numa posição fixa, isto é, parada. Mas se isso for verdade, então a flecha está sempre parada. Portanto, novamente o movimento deixa de existir.



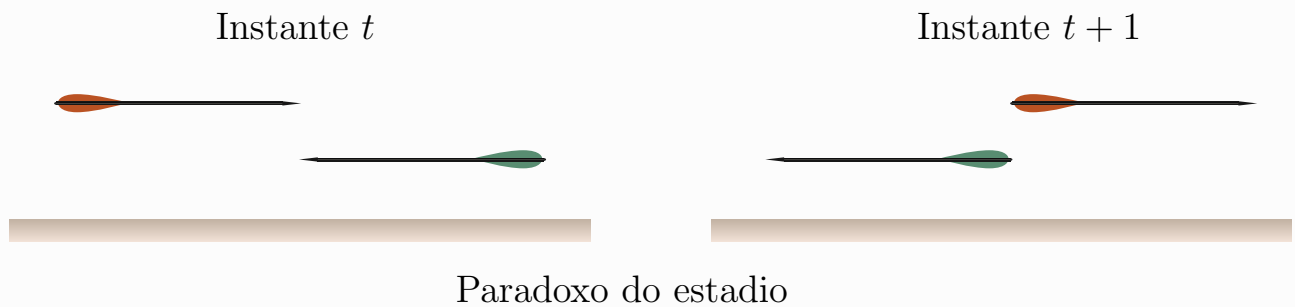
Paradoxo da flecha

O **Paradoxo de Aquiles** propõe uma desleal corrida entre o guerreiro e velocista e uma morosa tartaruga. O paradoxo diz que, dada à tartaruga uma vantagem qualquer em relação ao ponto de partida, seria impossível Aquiles alcançá-la. De fato, quando Aquiles conseguir cobrir a distância que dera de vantagem à tartaruga, esta já terá se deslocado e se encontrará em uma posição à frente do seu ponto de partida. Contudo, quando Aquiles também cobrir essa distância, a tartaruga já terá realizado um novo



Paradoxo de Aquiles

avanço e assim sucessivamente. Dessa forma, o contexto sugere que essa distância é infinitamente divisível e, para que Aquiles percorra todo o trajeto até alcançar a tartaruga, é necessário que ele atinja todos esses infinitos pontos que antecedem ao marco em que a tartaruga se encontra, assim se conclui que Aquiles jamais alcançaria a tartaruga.

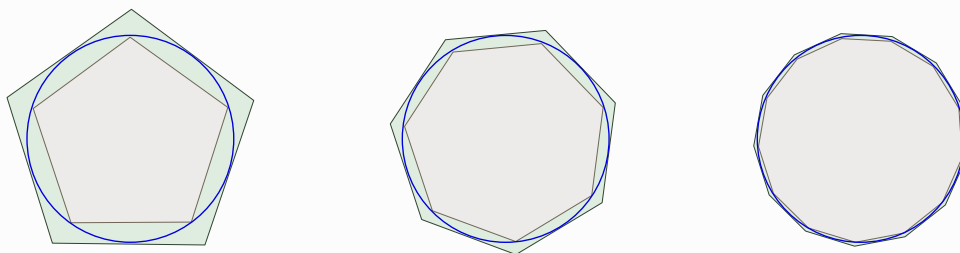


Enquanto que o **Paradoxo do Estádio** é um pouco mais elaborado e diz o seguinte: suponha inicialmente que o tempo e o espaço sejam constituídos de “partículas” mínimas e indivisíveis as quais chamaremos de *unidades*. Agora pense num estádio onde dois lançadores de dardos, situados em extremidades opostas do estádio, competem lançando simultaneamente seus respectivos dardos na mesma direção, mas em sentidos contrários. Suponhamos também que ambos os dardos se desloquem com velocidades iguais cujo valor é de uma unidade de espaço por uma unidade de tempo. Um observador, localizado na arquibancada lateral do estádio, de tal forma que os lançadores estejam posicionados um à sua direita e outro à sua esquerda, acompanha o deslocamento dos dardos. Imaginemos agora, o momento em que os dardos estão na eminência da sobreposição. Na próxima unidade de tempo, o dardo que vem da esquerda se move uma unidade de espaço para direita e o dardo que vem da direita avança uma unidade de espaço para esquerda. Dessa forma, em uma única unidade de tempo, os dardos se deslocaram, um em relação ao outro, duas unidades de espaço. Porém, para que isso pudesse acontecer, seria necessário, primeiramente, que os dardos se emparelhassem tendo uma unidade de espaço de diferença, mas isso só seria possível se ocorresse em um período de meia unidade de tempo. Entretanto, lembre-se de que a unidade de tempo é indivisível, logo essa situação se caracteriza como impossível.

É perceptível que os paradoxos da Dicotomia e de Aquiles fazem uma crítica às ideias de que o espaço e o tempo possam ser infinitamente divisíveis (contínuo). Por outro lado, os paradoxos da Flecha e Estádio questionam a possibilidade do espaço e do tempo serem compostos por unidades mínimas e indivisíveis (discreto). Zenão, de forma genial, consegue por meio de seus argumentos justificar de todas as formas a impossibilidade de ocorrência do movimento.

Assim como em qualquer paradoxo, o que mais nos incomoda é o fato de termos nossos sentidos e percepções contrariados. No paradoxo de Aquiles e a Tartaruga, por exemplo, sabemos que na prática a vitória do guerreiro sobre a tartaruga seria avassaladora, mas, ao que parece, o intuito de Zenão era justamente demonstrar as fragilidades em torno das concepções de **infinito** e de **infinitesimais**, do que era considerado **discreto** ou **contínuo**. Zenão não se dedicou ao estudo do infinito, no entanto, seus paradoxos formaram um conjunto de objetos que evidenciaram a necessidade da formulação de uma linguagem matemática apropriada e de um estudo aprofundado sobre o assunto na busca de entendimentos mais consistentes.

Na ausência de estudos e formalizações capazes de explicar os fenômenos que envolviam o infinito, alguns pensadores desenvolveram seus trabalhos evitando falar sobre ele. **Eudoxo de Cnido** era um dos que preferiu desenvolver seus métodos excluindo a ideia de infinito [9]. **O Método da Exaustão** proposto por Eudoxo consistia num processo utilizado para mensurar a área de figuras planas por meio da inscrição de  $n$  polígonos cuja soma de suas áreas se aproxima da área da figura onde foram inscritos. Quanto menores fossem as áreas dos polígonos inscritos na figura, maior seria a quantidade de polígonos necessários para cobrir sua área e maior a precisão da área da figura. Esse método foi aperfeiçoado por **Arquimedes** que fez uso dessa ideia calcular a área do círculo. Para isso, Arquimedes começou por inscrever e circunscrever polígonos regulares do mesmo tipo ao círculo. A medida que o número de lados dos polígonos iam aumentando, podia-se perceber que suas áreas iam se aproximando da área do círculo de tal forma que esta fosse maior que a área do polígono inscrito e menor que a do polígono circunscrito. Esse método também permitiu Arquimedes aferir a aproximação decimal do número  $\pi$  com rara precisão. A Figura 1.1 ilustra esse processo. O método de exaustão de Eudoxo/Arquimedes foi uma das primeiras incursões históricas no campo do cálculo infinitesimal, e sua genialidade permitiu uma compreensão mais profunda das propriedades do círculo e pavimentou o caminho para o desenvolvimento posterior de outras áreas da matemática e das engenharias.



**Figura 1.1:** Método da exaustão para calcular a área do círculo

[Aristóteles de Alexandria](#) separava o infinito em duas categorias, o **infinito atual** e o **infinito potencial**. O infinito atual é dado como completo e definido e consiste numa quantidade infinita de elementos. Apesar de definir o infinito atual, Aristóteles não acreditava em sua existência física. Para ele, o infinito era algo inalcançável, contudo não negava a existência de algum tipo de infinito,

“(...) Supor que o infinito não existe de forma alguma leva claramente a muitos resultados impossíveis: o tempo terá um começo e um fim, uma magnitude não será divisível em magnitudes, o número não será infinito” (ARISTÓTELES, 384 a.C., Física – Livro III, cap.6, p.1)[1]



Aristóteles  
384 a.C. – 322 a.C.

Dessa forma, Aristóteles propunha a existência do infinito em potência, isto é, a ideia de um infinito que só poderia ser alcançado em completude potencialmente por meio de sucessivas adições de objetos finitos, mas nunca em ato. Um exemplo do infinito potencial é a interpretação que damos ao número  $0,99999\dots$  como uma dízima periódica. Sabemos que a representação decimal desse número consiste num processo inacabável de sucessivos acréscimos do algarismo 9 após a vírgula. Em contrapartida, quando interpretamos o número  $0,99999\dots = 1$ , podemos observar a ideia do infinito atual que, apesar de ter sido negado por Aristóteles, foi fundamental para os resultados produzidos no século XIX que veremos mais adiante.

## 1.3 Idade Média

---

Durante a Idade Média, a maioria das discussões acerca do infinito, pelo menos aquelas que se têm registros, está voltada para o campo teológico na busca por justificar a natureza de Deus. [Tomás de Aquino](#), assim como Aristóteles, acreditava no infinito apenas como potencialidade e negava a existência de um infinito atual, com exceção apenas do infinito absoluto representado por Deus.

**Santo Agostinho**, diferentemente de Tomás de Aquino, reconhecia a existência do infinito atual, contudo restrita à mente divina. Somente Deus seria capaz de abstrair e de conter em completude a infinidade dos números.

“Dizer que nem a ciência de Deus é capaz de compreender as coisas infinitas é o que lhes falta ao atrevimento, para precipitar-se na voragem de profunda impiedade, que afirma não conhecer Deus todos os números. É muito certo que são infinitos. Com efeito, seja qual for o número que pretendas formar, não apenas pode aumentar pela adição de uma unidade, mas também, por maior que seja e por mais prodigiosa que seja a quantidade que encerra em si a razão e ciência dos números, não somente pode ser duplicada, mas também duplicada ao infinito. (...) Tal infinidade conjunta de todos os números é que escapa à ciência de Deus, que compreende certa quantidade de números e ignora os demais? Quem o dirá, por mais louco que esteja?”. (DELFINO[5], 2015, citando Santo Agostinho, p.17)



Tomás de Aquino  
1225 – 1274



Santo Agostinho  
354 – 430

Apesar da baixa produção científica durante a Idade Média, nesse período destaca-se o matemático italiano, **Leonardo de Pisa**, também conhecido como Fibonacci. Fibonacci não estudou o infinito, mas o envolveu, também sob a perspectiva potencial, em seu famoso trabalho conhecido como **Sequência de Fibonacci**.

Tal sequência pode ser obtida através do desenvolvimento da seguinte situação: um casal de coelhos nasce no início do ano. Considere as afirmações:

1. Depois de dois meses de idade, o casal atinge a maturidade reprodutiva e gera um novo casal e, a partir daí, a cada mês subsequente um novo casal é gerado.
2. Não ocorrem mortes durante o período de observação.

O número de casais de coelhos em cada mês forma a seguinte sequência

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Observe que, a partir do terceiro termo da sequência, cada termo é igual a soma dos outros dois imediatamente anteriores e esse processo pode ser repetido infinitas vezes. A importância dessa sequência está nos diversos contextos em que ela pode ser reconhecida, seja na natureza ou nos padrões da própria matemática. Essa sequência será melhor discutida no capítulo [Calculando o Infinito](#).

### A sequência de Fibonacci e o número de ouro

Os termos da sequência de Fibonacci estabelecem uma proporção conhecida como proporção áurea. Essa proporção é amplamente utilizada nas áreas da arte, arquitetura e design, pois é considerada esteticamente agradável aos olhos. O valor dessa proporção é aproximadamente 1,618... É um número irracional e infinito, representado na matemática pela letra grega  $\phi$  e conhecido popularmente como número de ouro. Seu valor pode ser aproximado pela divisão entre um termo da sequência de Fibonacci e seu antecessor. Quanto mais se avança na sequência, mais próximo desse número ficamos. Observe que, a partir do terceiro termo, temos

$$2 \div 1 = 2$$

$$3 \div 2 = 1,5$$

$$5 \div 3 = 1,666\dots$$

$$8 \div 5 = 1,6$$

$$13 \div 8 = 1,625$$

$$21 \div 13 = 1,61538\dots$$

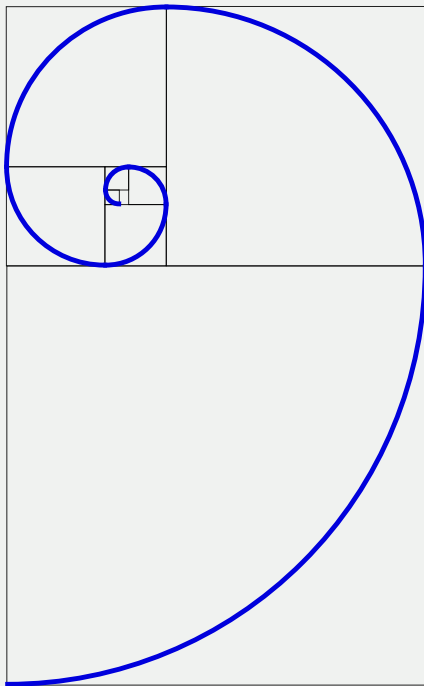


Leonardo Fibonacci  
1170 – 1250

Na famosa [Espiral de Fibonacci](#), reconhecida em diversos elementos e fenômenos da natureza, o número de ouro aparece da seguinte forma: considere os dois maiores quadrados da ilustração. Se o quadrado maior, que está abaixo, for construído com medida de lado igual a  $\phi$  cm, então o quadrado menor, no canto superior direito, terá uma unidade de comprimento. Assim, a divisão do tamanho do lado de um quadrado pelo lado do outro resulta na razão áurea:  $\phi \div 1 = \phi$ . O interessante é que essa mesma proporção se mantém para qualquer par de quadrados tomados dessa mesma forma. Ao traçarmos um arco

correspondente a  $\frac{1}{4}$  de circunferência unindo os dois vértices opostos de uma das diagonais de cada quadrado, o resultado será uma espiral de comprimento infinito.

Uma das mais belas representações e evidências da proporção áurea na natureza está na **Concha de Nautilus** e pode ser contemplada pelo leitor na capa desta apostila.



Espiral Áurea e a Concha de Nautilus

## 1.4 Idade Moderna

---

A Idade Moderna (1453 – 1789) marca a retomada dos avanços, descobertas e transformações em todas as áreas do conhecimento, e a matemática não foi exceção. Durante essa época, ocorreram progressos significativos no desenvolvimento do conceito de infinito. Matemáticos visionários exploraram as fronteiras da compreensão humana, desafiando a ideia de quantidades finitas e mergulhando no mundo abstrato do infinito. Essa exploração levou à criação de uma nova linguagem matemática, capaz de descrever com precisão a variação contínua, o movimento e a medição de áreas e volumes complexos. Com as novas ferramentas matemáticas desenvolvidas nesse período, esses avanços transformaram a maneira como enxergamos e interagimos

com o mundo ao nosso redor, abrindo portas para o progresso científico e tecnológico sem precedentes.

Hoje em dia, o **Cálculo Diferencial e Integral** é considerado uma das ferramentas mais importantes já desenvolvidas pelos matemáticos e compõe, de forma necessária e obrigatória, a maioria das grades curriculares dos cursos de graduação voltados para o campo das Ciências Exatas. É a parte da Matemática que se dedica, dentre outros assuntos, ao estudo do movimento, do cálculo de áreas, da determinação de retas tangentes à uma curva, do cálculo da velocidade instantânea de um móvel, bem como valores máximos e mínimos de uma função.

O seu desenvolvimento permitiu, por exemplo, compreender fenômenos relacionados ao “movimento dos planetas e a queda dos corpos na terra, o funcionamento das máquinas, o fluxo dos líquidos, a expansão dos gases, forças físicas tais como o magnetismo e a eletricidade, o voo, o crescimento das plantas e animais, a propagação das epidemias e a flutuação dos lucros” (DEVLIN, 2010, p. 24-25) [6].

As primeiras ideias que subsidiaram o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral também surgiram na antiga Grécia. Os gregos, desde a época em que **Euclides** escreveu a obra “**Os Elementos**”, já reuniam ferramentas suficientes para que o Cálculo pudesse ser desenvolvido, entretanto devido a algumas concepções restritivas, assim não o fizeram. Todavia, foram os gregos os primeiros responsáveis por investigar fenômenos ligados ao **infinito** na tentativa de compreender movimentos e cálculo de áreas [3].

Um dos principais conceitos e ferramentas do Cálculo é a ideia chamada **Limite**. Esse conceito pode ser considerado até como um dos seus fundamentos, contudo sua definição moderna é relativamente recente e só foi solidificada no século XIX. Ainda assim, é possível perceber algumas evidências do embrião dessa ideia nos trabalhos realizados pelos antigos gregos.

Os primeiros indícios sobre o aparecimento da ideia de limite surgem nos estudos de **Arquimedes** sobre os paradoxos de Zenão. Por exemplo, no paradoxo de Aquiles e a Tartaruga, para que o guerreiro alcance o réptil seria necessário que o mesmo percorresse uma quantidade infinita de segmentos  $c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n + \dots$  cujos comprimentos estariam cada vez mais próximos de zero à medida em que avançamos no índice  $n$ . Essa soma, apesar de reunir uma quantidade infinita de parcelas, tende a não ultrapassar um valor fixo, isto é, um valor limite. Como mencionamos, nessa época, o conceito de limite não estava formalizado, mas as razões pelas quais

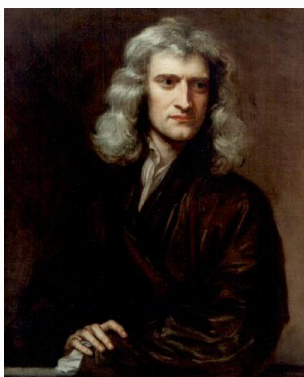
seu desenvolvimento foi inspirado já eram evidentes nos problemas encarados pelos gregos.

O cálculo diferencial e integral como o conhecemos hoje começou a ser formalizado no final do século XVII. [Gottfried Wilhelm Leibniz](#) e [Isaac Newton](#), dois dos maiores matemáticos e cientistas da história, desempenharam papéis fundamentais para o desenvolvimento do cálculo. Embora eles tenham trabalhado independentemente, suas contribuições foram extremamente influentes e complementares.

Leibniz é conhecido por desenvolver a notação moderna do cálculo diferencial e integral. Ele introduziu o conceito de diferencial e o símbolo “ $\partial$ ” para representá-lo, o que permitiu uma maneira mais clara e concisa de expressar derivadas e integrais. A notação de Leibniz, com seu uso de  $\partial x$  e  $\partial y$ , tornou o cálculo mais acessível e intuitivo para os matemáticos posteriores. Além disso, Leibniz desenvolveu regras para a manipulação simbólica de diferenciais e integrais, como a regra do produto e a regra da cadeia, que se tornaram fundamentais para a resolução de problemas complexos no cálculo.



Leibniz  
1646 – 1716



Isaac Newton  
1643 – 1727

Por outro lado, Isaac Newton é amplamente creditado como o co-desenvolvedor do cálculo diferencial e integral. Ele formulou os princípios fundamentais do cálculo em sua obra “*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*”. Newton desenvolveu o conceito de derivada como uma taxa de variação instantânea e estabeleceu as bases para a teoria das equações diferenciais. Além disso, ele enunciou o Teorema Fundamental do Cálculo, que estabelece a relação entre diferenciação e integração, permitindo a determinação das áreas sob curvas e a solução de problemas relacionados ao movimento.

As contribuições de Leibniz e Newton foram de fundamental importância para a compreensão e manipulação do infinito no avanço do cálculo diferencial e integral. Enquanto Leibniz focava em uma abordagem mais simbólica e notacional, Newton enfatizava os princípios fundamentais e as aplicações físicas. Juntas, suas ideias

estabeleceram os fundamentos do cálculo moderno e permitiram sua aplicação em diversas áreas da matemática, física, engenharia e ciências naturais.

## 1.5 Idade Contemporânea

---

Os séculos XVIII, XIX e XX compreendem uma era de grande progresso científico e matemático, marcados por descobertas fundamentais que revolucionaram nosso entendimento acerca do infinito e do cálculo. Nesse período, podemos destacar alguns importantes nomes e seus respectivos trabalhos que foram de fundamental importância para o avanço e concepções que temos hoje.



Bernard Bolzano  
1781 – 1848

**Bernard Bolzano**, foi um padre matemático e filósofo checo do século XIX, e desempenhou um importante papel para estudo do infinito. Ele foi um dos primeiros a abordar questões relacionadas à continuidade, limites e infinitude com uma visão precisa e rigorosa. Bolzano desenvolveu um importante teorema conhecido como **Teorema de Bolzano**. Esse teorema foi bastante útil para a compreensão da continuidade das funções e dos conceitos relacionados ao infinito. Além disso, Bolzano formulou uma definição rigorosa de sequências infinitas e provou resultados importantes sobre sua

convergência e divergência. As contribuições de Bolzano foram cruciais para a consolidação das bases do cálculo e tiveram um impacto duradouro na matemática moderna.

**Karl Weierstrass**, um matemático alemão do século XIX, também deixou contribuições significativas para o estudo do infinito. Weierstrass foi um dos principais arquitetos da análise matemática rigorosa, desempenhando um papel fundamental na superação das dificuldades conceituais e no desenvolvimento de técnicas precisas para lidar com o infinito. Sua definição rigorosa de limite e continuidade permitiu um tratamento mais preciso de funções e séries infinitas. Além disso, suas contribuições para a teoria das funções analíticas e a teoria do cálculo das variações foram essenciais para o avanço desses campos. Seus trabalhos colaboraram profundamente com o desenvolvimento de várias áreas da matemática.



Karl Weierstrass  
1831 – 1916



Richard Dedekind  
(1831-1916)

**Richard Dedekind** foi um matemático alemão do século XIX cujas contribuições para o estudo do infinito também foram notáveis e revolucionárias. Ele foi um dos primeiros a desenvolver uma abordagem rigorosa para o conceito de números reais, introduzindo os famosos **Cortes de Dedekind**. Ao propor essa ideia, Dedekind estabeleceu uma base sólida para a análise matemática moderna, mostrando como os números reais podem ser construídos a partir de uma sequência ordenada de números racionais. Além disso, Dedekind trabalhou extensivamente na teoria dos conjuntos, ajudando a

estabelecer os fundamentos da matemática moderna. Suas contribuições para o estudo do infinito foram fundamentais para o desenvolvimento de várias áreas da matemática, proporcionando uma compreensão mais profunda e rigorosa dos números e do conceito de infinitude.

**Georg Cantor**, foi outro matemático alemão do final do século XIX. Dentre os estudiosos já citados, Cantor certamente foi o nome mais expressivo em suas revolucionárias contribuições para o entendimento do infinito, que transformaram nossa compreensão da matemática e influenciaram campos diversos. Cantor foi pioneiro na teoria dos conjuntos e em explorar os mistérios contidos neles.

Uma das principais contribuições de Cantor foi o desenvolvimento do conceito de **cardinalidade**. Além disso, ele mostrou que nem todos os infinitos são iguais, e que existem diferentes graus de infinitude. Cantor demonstrou que, mesmo dentro do conjunto dos números naturais, infinitos subconjuntos podem ter diferentes tamanhos.

Outro conceito inovador introduzido por Cantor foi o de conjunto enumerável. Ele mostrou que certos conjuntos infinitos podem ser colocados em correspondência um a um com o conjunto dos números naturais, ou seja, podem ser contados de forma ordenada e completa. Isso desafiou a intuição de que apenas os conjuntos finitos poderiam ser contados. Cantor estendeu essa ideia ao introduzir os números transfinitos, que representam diferentes níveis de infinitude além dos números naturais.

Cantor também sofreu oposição e críticas, enfrentando resistência de alguns matemáticos e filósofos que consideravam suas ideias perturbadoras e paradoxais. Ainda assim, suas descobertas sobre o infinito e a teoria dos conjuntos abriram caminho para novos desenvolvimentos matemáticos, como a topologia e a análise matemática.

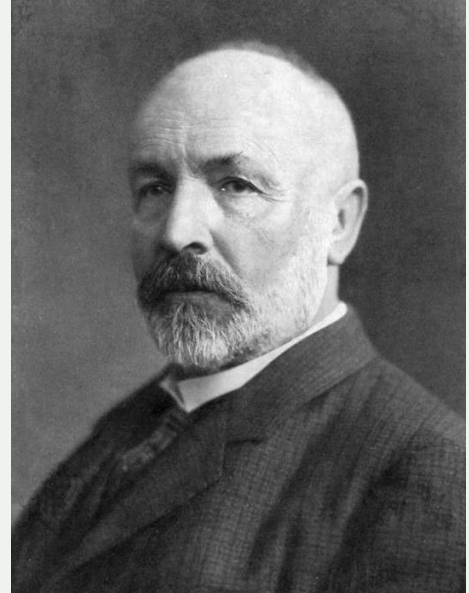
## Biografia de Georg Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Phillipp Cantor nasceu em São Petersburgo, na Rússia, no dia 3 de março de 1845. Aos 11 anos, Cantor se mudou com a família para Alemanha e estudou na Realschule, em Darmstadt, onde viveu como interno e se formou em 1860 recebendo honrarias por seu destaque intelectual.

Em 1863, após a morte de seu pai, Cantor se muda para a Universidade de Berlim para cursar Matemática e cria vínculos com outros importantes matemáticos da época como [Weierstrass](#), [Kummer](#) e [Hermann Schwarz](#). Em 1867, Cantor recebe o título de doutorado por sua tese sobre [teoria de números](#) e, em 1869, é nomeado para lecionar na Universidade de Halle onde, posteriormente, assumiu o cargo de Professor Extraordinário.

As ideias de Cantor relacionadas aos conjuntos e ao infinito foram tratadas com certo receio entre os matemáticos da época. Contudo, um ex-professor de Cantor, [Leopold Kronecker](#), foi mais rigoroso em suas críticas. Kronecker descreveu tais ideias como “matematicamente insanas” e o impediu de assumir uma cadeira na Universidade de Berlim. Lamentavelmente, esses fatos colaboraram para que Cantor se tornasse vítima de uma severa depressão acompanhada de vários surtos mentais, fato que o obrigou a trocar o campus da universidade pelos corredores de um sanatório.

Em 1917, Cantor deu entrada pela última vez no hospital psiquiátrico e, na tarde do dia 06 de janeiro de 1918, Cantor morreu como vítima de uma parada cardíaca.



Georg Cantor  
1845 – 1918

**David Hilbert**, também foi outro importante matemático alemão dos séculos XIX e XX. Discípulo de Cantor, ele desempenhou um papel crucial na formalização e axiomatização da matemática, particularmente na teoria dos conjuntos e na geometria. Hilbert propôs uma lista de 23 problemas matemáticos desafiadores para o século XX, nos quais muitos deles envolviam conceitos relacionados ao infinito. Sua abordagem foi caracterizada por uma busca por fundamentos sólidos e rigorosos, especialmente na lógica e no estudo dos axiomas. Hilbert também trabalhou na teoria dos números, contribuindo para o desenvolvimento de conceitos como os números transcendentais e a axiomatização da teoria dos números reais. Seu trabalho teve um impacto profundo na matemática moderna, estabelecendo bases sólidas para o estudo do infinito e influenciando gerações subsequentes de matemáticos. As contribuições de Hilbert ampliaram nossa compreensão do infinito matemático e impulsionaram avanços significativos em várias áreas da disciplina. Discípulo e defensor das ideias de Cantor, Hilbert em certa ocasião, pronunciou a seguinte frase: *“Ninguém será capaz de nos tirar do paraíso que Cantor criou para nós”*. Numa tentativa de explicar as ideias de Cantor, Hilbert propôs o famoso experimento mental chamado **Hotel de Hilbert**.



David Hilbert  
1868 – 1943

### O Hotel de Hilbert

Imagine que você esteja viajando por um lugar misterioso onde, nada daquilo que parece ser, de fato é. Nesse lugar, há um grande hotel de nome “Ápeiron” cujo número de quartos é infinito. Você, após um dia de várias descobertas e aventuras nesse misterioso lugar, encontra-se cansado e deseja repousar num dos quartos do grande Ápeiron. Entretanto, descobre que o hotel está lotado e que todos os infinitos quartos estão ocupados. Nesse momento, você percebe que será preciso procurar outro estabelecimento, mas logo em seguida é informado pelo dono e gerente do hotel, o Sr. Hilbert, que isso não será necessário. “É fato que todos nossos infinitos quartos estão ocupados com infinitos hóspedes, entretanto, encontrar um quarto para o senhor não será nenhum problema.”, disse o Sr. Hilbert. O Sr. Hilbert, espertamente, faz uso de um simples, mas eficaz, artifício. Transfere o hóspede do quarto de número 1 para o quarto de número 2. O ocupante do quarto de número 2 vai para o quarto de número 3. O cliente do quarto de número 3 passa para o quarto de número 4, e assim

por diante. Dessa forma, não é necessário despejar nenhum cliente que ali está hospedado e você consegue seu desejado quarto.

De Demócrito à Hilbert, a busca pelo entendimento acerca do infinito foi essencial para o desenvolvimento da matemática. Ela impulsionou a criação de métodos inovadores que permitiram lidar com conceitos complexos e abstratos. Essa busca constante desafiou os limites do pensamento humano e, até hoje, inspira gerações de matemáticos e outros estudiosos que buscam dar respostas à fenômenos relacionados a esse tema.

# Números Para Contar

---

|     |                                        |    |
|-----|----------------------------------------|----|
| 2.1 | Como contar matematicamente? . . . . . | 21 |
| 2.2 | Conjuntos . . . . .                    | 22 |
| 2.3 | Operações entre Conjuntos . . . . .    | 30 |
| 2.4 | Funções . . . . .                      | 35 |
| 2.5 | Conjuntos Finitos . . . . .            | 43 |
| 2.6 | Conjuntos Infinitos . . . . .          | 51 |

---

## 2.1 Como contar matematicamente?

---

Contar é uma ação muito comum. Ainda quando crianças, aprendemos a contar coisas e usamos essa habilidade ao longo de nossas vidas sem apresentar dificuldades. Conseguimos perceber que podemos contar até onde desejarmos e que não existe o último número, isto é, podemos contar até o infinito. Porém, como vimos no capítulo anterior, apenas a habilidade de saber contar não é suficiente para responder questões sobre o infinito. Para podermos estudar o infinito matematicamente, precisamos definir com precisão o que significa contar. Essa definição precisa ser simples, rigorosa e abrangente. Além disso, ela precisa ser adequada e sólida para produzir resultados matemáticos. Uma característica que essa definição deve ter é não depender do que está sendo contado, isso é, não importa se estamos contando laranjas, dedos, grãos de areia ou estrelas no céu. O conceito de contar deve ser sempre o mesmo.

Neste capítulo, iremos estruturar o processo de contagem e para isso vamos formalizar o que é um conjunto, quais são suas propriedades, como operar com eles e como usá-los para contar quantidades finitas e infinitas.

## 2.2 Conjuntos

---

Georg Cantor, por volta de 1872, deu início ao estudo sistematizado sobre os conjuntos. Esses estudos se constituíram como base para que, no início do século XX, [Ernst Zermelo](#) e [Abraham Fraenkel](#) contribuíssem substancialmente para a construção uma teoria axiomática sobre conjuntos que buscava estruturar esse conceito e principalmente fugir das contradições e paradoxos que a teoria ingênua de Cantor propiciava. Contudo, em nossos estudos, trataremos essa ideia de maneira um pouco menos sistematizada e mais intuitiva.

Dizer se uma quantidade de objetos é finita, ou infinita, pode não ser um exercício trivial. É bastante comum encontrarmos confusões nesse sentido. Alguém poderia citar “a quantidade de grãos de areia na praia”, ou talvez “a quantia de gotas d’água do oceano” ou ainda a “quantidade de estrelas no céu” como exemplos de conjuntos infinito. Contudo, apesar de representarem enormes quantidades, essas quantidades são todas finitas. Então, como mensurar o “tamanho do infinito”? Como contar a quantidade de elementos de um conjunto e concluir se ela é ou não finita?

As respostas para estes questionamentos não se resumem em apenas uma palavra ou uma frase. É preciso estruturar cada detalhe, cada pensamento e cada definição. Neste capítulo, iremos rever alguns importantes conceitos sobre conjuntos já estudados nas séries do ensino fundamental e médio e, a partir deles, iremos construir outros novos que irão nos direcionar nesse exercício de mensurar quantidades.

### Conceitos, notações e definições

---

Vamos iniciar nosso estudo apresentando a definição de conjunto segundo a teoria desenvolvida por Cantor.

#### DEFINIÇÃO 2.1: CONJUNTO

Conjunto é uma coleção, um agrupamento ou uma lista de objetos quaisquer.

É comum indicarmos um conjunto utilizando uma letra maiúscula do nosso alfabeto latino, já os elementos que compõem esse conjunto são genericamente indicados por letras minúsculas. Uma das formas utilizadas para fazer a representação de um conjunto é por **enumeração**, onde se lista seus elementos entre um par de chaves. Veja alguns exemplos.

O conjunto  $V$  das vogais que compõem o nosso alfabeto pode ser representado da seguinte maneira

$$V = \{ a, e, i, o, u \}$$

Já o conjunto  $P$  dos planetas do sistema solar pode ser escrito por

$$P = \{ \text{Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Netuno} \}$$

O conjunto  $N$  dos naipes das cartas de um baralho representamos por

$$N = \{ \text{espadas, ouros, paus, copas} \}$$

É possível também representar um conjunto por **caracterização**. Esse modo de representação faz uso de uma propriedade que caracteriza os elementos de um conjunto sem a necessidade de listá-los, por exemplo,

$$V = \{ x \mid x \text{ é vogal do alfabeto latino} \}$$

e, nesse caso, lemos “ $V$  é o conjunto dos elementos  $x$  tais que esses elementos são vogais do alfabeto latino”. É importante ressaltar que, quando lidamos com um elemento oculto ou desconhecido, é comum referirmos a ele utilizando uma letra minúscula do nosso alfabeto, contudo, por uma questão de tradição, a letra “ $x$ ” é a mais utilizada para esses casos, salvo quando sua utilização gerar algum tipo de confusão. Outro símbolo que merece destaque é a linha vertical “ $|$ ”. Esse símbolo equivale à expressão “tal que”.

A próxima definição formaliza o conceito de um elemento pertencer ou não a um determinado conjunto.

### DEFINIÇÃO 2.2: PERTINÊNCIA

Quando queremos indicar que  $x$  é elemento de um conjunto  $A$ , escrevemos “ $x \in A$ ” e lemos “ $x$  pertence ao conjunto  $A$ ”. Quando  $x$  não é um elemento de  $A$ , escrevemos “ $x \notin A$ ” e lemos “ $x$  não pertence ao conjunto  $A$ ”.

Dados o conjunto  $T$  que representa os números múltiplos de 3 e menores que 20, ou seja,

$$T = \{ x \mid x \text{ é múltiplo de 3 menor que 20} \}$$

e conjunto  $P$  que representa os números primos menores que 30, isto é,

$$P = \{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 \}$$

temos:

- ◇  $0 \in T$ , mas  $0 \notin P$
- ◇  $2 \in P$ , mas  $2 \notin T$
- ◇  $8 \notin T$  e  $8 \notin P$
- ◇  $3 \in P$  e  $3 \in T$

Alguns conjuntos numéricos são usados com grande frequência e por isso possuem caracteres especiais que os representam.

Designamos por  $\mathbb{N}$  o conjunto dos números **Naturais**; por  $\mathbb{Z}$  o conjunto dos números **Inteiros**; por  $\mathbb{Q}$  o conjunto dos números **Racionais**; por  $\mathbb{I}$  o conjunto dos **Irracionais**; por  $\mathbb{R}$  o conjunto dos números **Reais** e por  $\mathbb{C}$  o conjunto dos números **Complexos**. Neste capítulo, trataremos apenas dos conjuntos  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{Z}$ . Os conjuntos  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{I}$ , e  $\mathbb{R}$  serão discutidos no próximo capítulo. Já o conjunto  $\mathbb{C}$  foge dos nossos interesses no momento e não será tratado neste texto.

A essência da caracterização do conjunto  $\mathbb{N}$  consiste na ideia de *sucessão*. De forma intuitiva, dizer que  $m$  é o sucessor de um elemento  $n \in \mathbb{N}$ , significa dizer que  $m$  é o elemento desse conjunto que vem “imediatamente após”  $n$ . Munidos dessa ideia, podemos descrever o conjunto  $\mathbb{N}$  por meio das seguintes propriedades

1. Todo número natural  $n$  tem um único sucessor;
2. Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
3. Existe um único número natural, chamado *um* e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;
4. Seja  $X$  um subconjunto de números naturais. Se 1 pertence a  $X$  e se, além disso, o sucessor de todo elemento de  $X$  ainda pertence a  $X$ , então  $X = \mathbb{N}$ .

As afirmações descritas acima são conhecidas como **Axiomas de Peano** e foram escritas pelo matemático italiano **Giuseppe Peano** em 1901.

Utilizando a representação por enumeração, o conjunto dos números que utilizamos para contar coisas, isto é, o conjunto dos números naturais  $\mathbb{N}$  pode ser representado da seguinte maneira.

**DEFINIÇÃO 2.3: NÚMEROS NATURAIS**

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Vale a pena comentar que, por questões de convenção, alguns autores de livros didáticos adotam o número zero como sendo o primeiro número natural. Nós, entretanto, preferimos começar este conjunto pelo número 1, afinal, como estamos tratando dos números que servem para quantificar coisas, achamos razoável começar por aquele que representa a unidade. Mas isso é apenas uma questão de preferência!

Perceba que a definição do conjunto  $\mathbb{N}$  nos passa a ideia de um conjunto que não tem fim, afinal a primeira propriedade diz que todo número natural  $n$  possui um sucessor.

Como podemos ter certeza de que este conjunto não tem fim?



Calma! Não se apresse. Em breve você mesmo será capaz de responder sua própria pergunta.

Podemos também utilizar a representação por enumeração para descrever o conjunto dos números naturais acrescido de seus opostos (negativos) mais o zero, isto é, o conjunto dos números inteiros  $\mathbb{Z}$ :

**DEFINIÇÃO 2.4: NÚMEROS INTEIROS**

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Por que o conjunto dos números inteiros tem o  $\mathbb{Z}$  como símbolo?





Essa é fácil! É porque estamos tratando do conjunto dos números Zinteiros!!!

Na verdade o símbolo  $\mathbb{Z}$  refere-se à letra Z da palavra *Zahl*, que em alemão significa número. Já o símbolo  $\mathbb{Q}$  refere-se à palavra quociente.

Parece que o conjunto  $\mathbb{Z}$  tem o dobro de elementos do conjunto  $\mathbb{N}$  mais o zero, será que isso é verdade?



Intuitivamente, isso parece verídico. Entretanto precisamos de mais recursos para ter essa confirmação.

As vezes, é necessário representar conjuntos que não possuem elementos. Vamos definir esse tipo de conjunto.

#### DEFINIÇÃO 2.5: CONJUNTO VAZIO

Um conjunto é chamado de **conjunto vazio** quando não possui nenhum elemento e utilizamos os símbolos  $\emptyset$  ou  $\{\}$  para representá-lo.

O conjunto cuja caracterização não aceita nenhum elemento faz gerar um conjunto vazio. Confira alguns exemplos de conjuntos que não possuem elementos e por isso são chamados de vazios.

- ◇ O conjunto dos números inteiros ímpares e múltiplos de 2, isto é,

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é ímpar e múltiplo de } 2\} = \emptyset$$

- ◇ O conjunto dos números inteiros primos e múltiplos de 6, isto é,

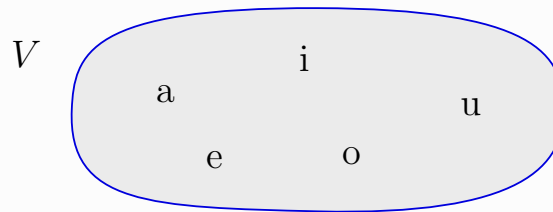
$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é primo e múltiplo de } 6\} = \emptyset$$

◇ O conjunto dos números racionais cujo quadrado seja negativo, isto é,

$$\{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 0 \} = \emptyset$$

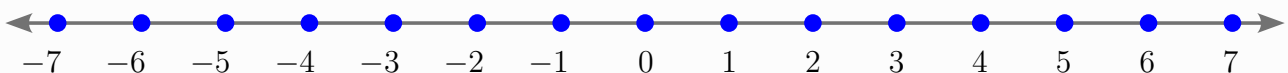
Em algumas situações, a representação gráfica de um conjunto nos ajuda compreender melhor seus elementos e suas propriedades. Uma maneira prática de visualizar um conjunto é por meio de uma representação conhecida como **diagrama de Venn**. Para isso, desenhamos uma região fechada e dispomos os elementos do conjunto dentro dessa região. O próximo exemplo apresenta um diagrama de Venn.

Representação do conjunto das vogais por diagrama de Venn.



A utilização do diagrama de Venn para representar um conjunto é bastante útil para facilitar o entendimento sobre as operações básicas de conjuntos que veremos adiante.

Quando lidamos com conjuntos numéricos, uma boa representação gráfica é a **reta numerada**. Para isso, basta construir uma reta qualquer e marcar um ponto como sendo o número zero o qual chamamos de origem; em seguida, definimos os sentidos positivos e negativos da reta. Por exemplo, se a reta estiver desenhada na horizontal, podemos tomar os pontos à direita do zero para representar os números positivos e à esquerda do zero para os negativos. Escolhida uma distância fixa para separar os valores inteiros, a reta está pronta para representar qualquer conjunto numérico. A Figura 2.1 ilustra a reta numerada onde destacamos os números inteiros compreendidos entre  $-7$  e  $7$ . Fica subentendido pelas pontas de setas nas extremidades dessa reta que os números se estendem indefinidamente.



**Figura 2.1:** Representação dos números inteiros na reta numerada

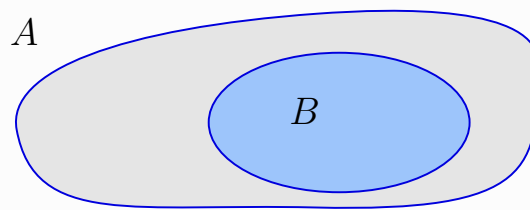
Comumente, tratamos de conjuntos que fazem parte de outros conjuntos. Segue a definição que usamos nesses casos.

**DEFINIÇÃO 2.6: SUBCONJUNTO**

Quando todo elemento de um conjunto  $A$  é também elemento de um conjunto  $B$ , dizemos que  $A$  é um **subconjunto** de  $B$  ou que  $A$  está contido em  $B$  e escrevemos

$$A \subset B.$$

A Figura 2.2 ilustra a representação de subconjuntos por meio do diagrama de Venn, neste caso temos  $B \subset A$



Abaixo estão exemplificados alguns conjuntos e alguns de seus subconjuntos.

- ◇ O conjunto  $\{1, 2\}$  é um subconjunto de  $\{1, 2, 3\}$ , logo  $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$ .
- ◇ Considerando  $P$  o conjunto dos paulistas e  $B$  o conjunto dos brasileiros, então temos que  $P \subset B$ , pois todo paulista é brasileiro.

Observe que o fato de  $A \subset B$  não implica em  $B \subset A$ , mas quando isso ocorre, isto é, quando  $A$  e  $B$  são dois conjuntos tais que  $A \subset B$  e  $B \subset A$ , então temos que  $A = B$ .

Este resultado constitui uma ferramenta muito útil quando se deseja provar que dois conjuntos são iguais.

**DEFINIÇÃO 2.7: IGUALDADE**

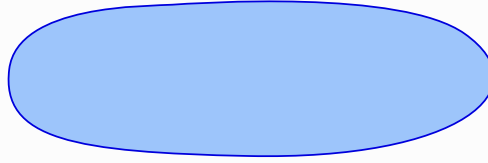
Dizemos que um conjunto é  $A$  igual a outro conjunto  $B$ , e indicamos

$$A = B$$

se  $A$  e  $B$  possuem exatamente os mesmo elementos.

A Figura 2.2 ilustra a representação dois conjuntos iguais, neste caso temos  $A = B$

$$A = B$$



Observe alguns exemplos de igualdade entre conjuntos:

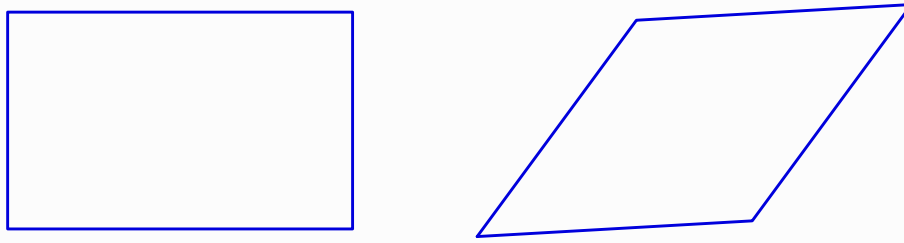
- ◇  $\{a, b, c\} = \{c, b, a\} = \{b, a, c\}$
- ◇  $\{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 3\} = \{-1, 0, 1, 2\}$

No primeiro item, podemos observar que a ordem em que os elementos aparecem dentro das chaves é indiferente, ou seja, os elementos podem aparecer em qualquer ordem que ainda assim caracterizam o mesmo conjunto. Outra observação é que, dado um conjunto que possua elementos repetidos, não há necessidade de listar essa repetição. Um único elemento é suficiente para representar todos que se repetem. Quando a ordem ou as repetições dos elementos são relevantes, não podemos dizer que eles compõem um conjunto. Nesses casos, usamos outras nomenclaturas como, por exemplo, **sequências**.

Para além disso, quando todo elemento de um conjunto  $A$  é também elemento de um conjunto  $B$ , mas nem todo elemento de  $B$  é elemento de  $A$ , isto é,  $A \subset B$ , mas  $A \neq B$ , dizemos o conjunto  $A$  é um **subconjunto próprio** do conjunto  $B$ . A seguir apresentamos um exemplo de subconjunto próprio.

Sabemos que todo retângulo é paralelogramo, pois é um quadrilátero que possui dois pares de lados opostos paralelos. Entretanto, nem todo paralelogramo é retângulo, então podemos concluir que o conjunto dos retângulos é subconjunto próprio do conjunto dos paralelogramos.

Indicamos por  $A \not\subset B$  e lemos “ $A$  não está contido em  $B$ ” quando o conjunto  $A$  não é um subconjunto de  $B$ . Isto é,  $A$  tem pelo menos um elemento que não pertence ao conjunto  $B$ . em outras palavras, para que um conjunto  $A$  não esteja contido em um conjunto  $B$  é necessário que exista um elemento  $x \in A$  tal que  $x \notin B$ . Em decorrência disso, conseguimos observar que  $\emptyset \subset X$  para qualquer que seja  $X$ , pois do contrário, deveria existir algum elemento  $x \in \emptyset$  tal que  $x \notin X$ . Mas isso seria



**Figura 2.2:** Retângulo e paralelogramo

um absurdo, pois, por definição, o conjunto  $\emptyset$  não possui elemento algum. Portanto, temos o seguinte resultado.

**TEOREMA 2.8: PROPRIEDADE DO CONJUNTO VAZIO**

O  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.

Os símbolos “ $\subset$ ” e “ $\not\subset$ ” são utilizados para representar a existência ou não de uma relação de **inclusão** entre dois conjuntos e não devem ser confundidos com os símbolos “ $\in$ ” e “ $\notin$ ” que são utilizados para relacionar elemento com conjunto.

## 2.3 Operações entre Conjuntos

Tendo definido o que são conjuntos, vamos agora apresentar algumas formas de operar com eles e produzir novos conjuntos.

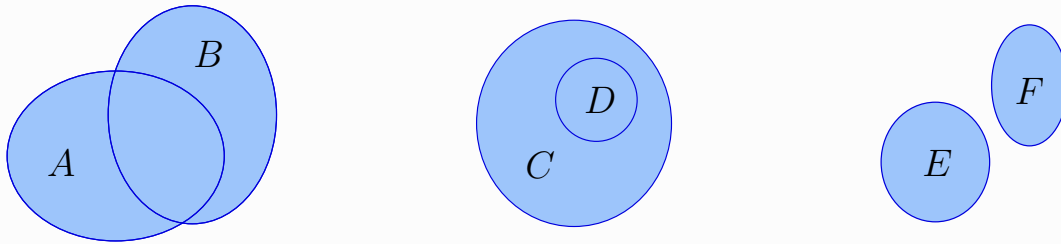
Quando temos dois conjuntos  $A$  e  $B$  e queremos os elementos que podem estar em qualquer um deles, estamos interessados na união desses conjuntos. Como os elementos do conjunto  $A$  atendem a uma propriedade e os elementos de  $B$  atendem a outra propriedade, ao escolher um elemento de qualquer um dos dois conjuntos estamos interessados naqueles que satisfazem ou a propriedade de estar em  $A$  ou a propriedade de estar em  $B$ .

**DEFINIÇÃO 2.9: UNIÃO**

Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos quaisquer. Definimos a **união** de  $A$  com  $B$  como sendo o conjunto formado pelos elementos que estão em  $A$  ou estão em  $B$  e, indicamos

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

A região azul da Figura 2.3 apresenta as possíveis formas de representação da união entre dois conjuntos por meio do diagrama de Venn.



**Figura 2.3:** Representação das uniões  $(A \cup B)$ ,  $(C \cup D)$  e  $(E \cup F)$  por diagrama de Venn

Observe que a expressão “ $x \in A$  ou  $x \in B$ ” significa que pelo menos uma dessas duas alternativas é verdadeira, mas nada impede que  $x \in A$  e  $x \in B$  sejam simultaneamente verdadeiras.

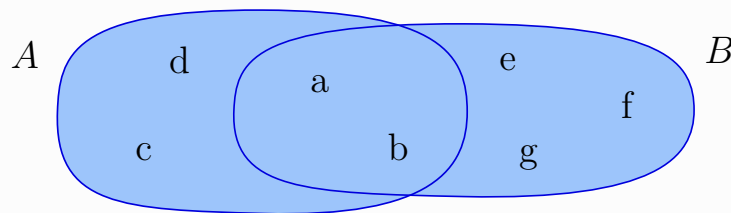
Sejam os conjuntos

$$A = \{a, b, c, d\} \quad \text{e} \quad B = \{a, b, e, f, g\}.$$

A união entre esses conjuntos pode ser escrita como

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

e é representada pelo diagrama de Venn.



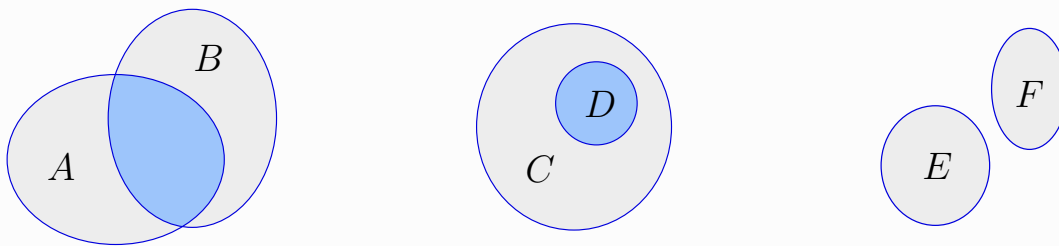
Quando tratamos dos elementos que pertencem ao mesmo tempo ao conjunto  $A$  e ao conjunto  $B$ , estamos interessados na interseção entre eles. Neste caso, não basta que os elementos satisfaçam apenas a propriedade do conjunto  $A$  ou apenas a propriedade do conjunto  $B$ , aqui eles precisam possuir ambas as propriedades.

**DEFINIÇÃO 2.10: INTERSEÇÃO**

Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos quaisquer. Definimos a **interseção** entre os conjuntos  $A$  e  $B$  como sendo o conjunto formado pelos elementos que estão em  $A$  e em  $B$  simultaneamente e o indicamos por

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

A região azul da Figura 2.4 apresenta as possíveis formas de representação da interseção entre dois conjuntos por meio do diagrama de Venn.



**Figura 2.4:** Representação das interseções  $(A \cap B)$ ,  $(C \cap D)$  e  $(E \cap F)$  por diagrama de Venn

Na Figura 2.4, note que  $E \cap F = \emptyset$ .

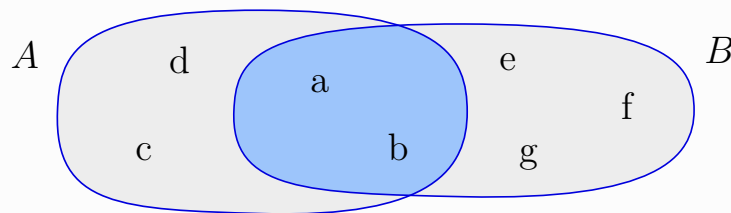
Sejam os conjuntos

$$A = \{a, b, c, d\} \quad \text{e} \quad B = \{a, b, e, f, g\}.$$

A interseção entre esses conjuntos pode ser escrita como

$$A \cap B = \{a, b\}$$

e é representada pelo diagrama de Venn.



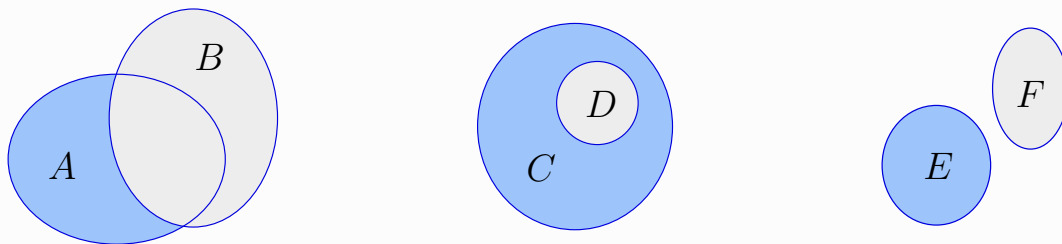
Quando queremos elementos que estão em um conjunto, mas não estão em outro, estamos interessados na diferença entre os conjuntos.

**DEFINIÇÃO 2.11: DIFERENÇA**

Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos quaisquer. Chamamos de **diferença** entre os conjuntos  $A$  e  $B$  o conjunto cujos elementos estão em  $A$ , mas não estão em  $B$  e, indicamos por

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

A região azul da Figura 2.5 apresenta as possíveis formas de representação da diferença entre dois conjuntos por meio do diagrama de Venn.



**Figura 2.5:** Representação das diferenças  $(A - B)$ ,  $(C - D)$  e  $(E - F)$  por diagrama de Venn

Uma outra forma de representar a diferença entre dois conjunto é  $A \setminus B = A - B$ .

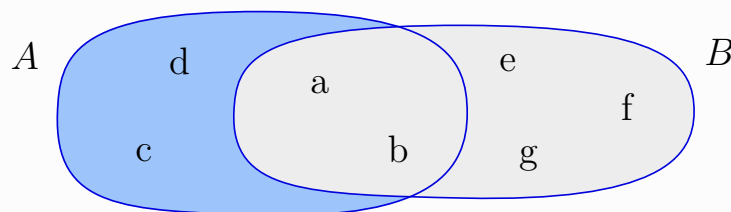
Sejam os conjuntos

$$A = \{a, b, c, d\} \quad \text{e} \quad B = \{a, b, e, f, g\}.$$

A diferença entre esses conjuntos pode ser escrita como

$$A - B = \{c, d\}.$$

e é representada pelo diagrama de Venn.



Por outro lado, quando temos um conjunto e um de seus subconjuntos próprio e estamos interessados naquele elemento que pertence ao conjunto, mas não ao subconjunto, estamos tratando do complementar do subconjunto.

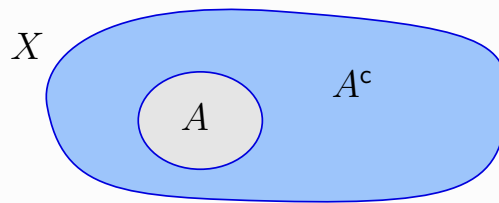
**DEFINIÇÃO 2.12: COMPLEMENTAR**

Consideremos um conjunto  $X$ . Seja  $A$  um subconjunto de  $X$ . Entende-se por **complementar** do conjunto  $A$ , e indicamos por

$$A^c = X - A$$

o conjunto formado pelos elementos pertencentes a  $X$  que não pertencem a  $A$ .

A região azul da Figura 2.6 representa o complementar do conjunto  $A$  em relação ao conjunto  $X$  por meio do diagrama de Venn.



**Figura 2.6:** Representação do complementar do conjunto  $A$  em relação ao conjunto  $X$ , isto é,  $A^c$ , por meio do diagrama de Venn.

O seleto grupo das seleções campeãs mundiais do torneio de futebol organizado pela FIFA é formado por Alemanha, Argentina, Brasil, Espanha, França, Inglaterra, Itália e Uruguai. Desse grupo, as equipes Alemanha, Argentina, Brasil e Itália colecionam três ou mais títulos do torneio.

Seja  $S$  o conjunto formado por todas as seleções campeãs do torneio FIFA

$$S = \{ \text{Alemanha, Argentina, Brasil, Espanha, França, Inglaterra, Itália, Uruguai} \}$$

Seja  $T$ , um subconjunto de  $S$ , formado pelas seleções que possuem três ou mais títulos dessa competição

$$T = \{ \text{Alemanha, Argentina, Brasil, Itália} \}$$

O conjunto  $T^c$  formado pelas equipes que possuem menos de três títulos mundiais pode ser escrito por

$$T^c = S - T = \{ \text{Espanha, França, Inglaterra, Uruguai} \}$$

Aqui concluímos a apresentação de conjuntos e suas principais operações. Podemos

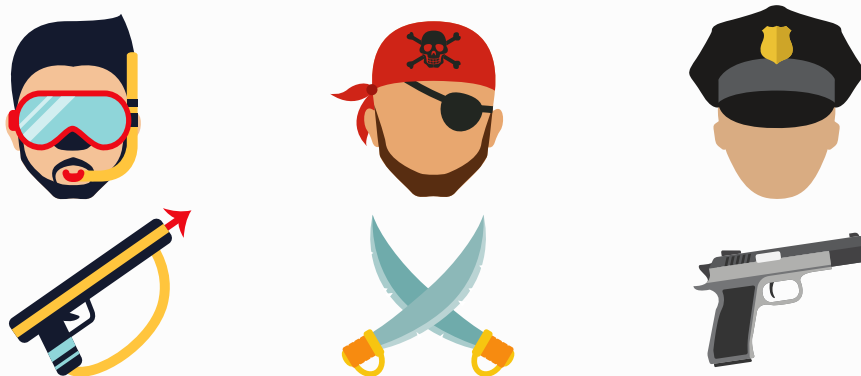
então usá-los para representar os objetos que desejamos contar. Porém, apenas agrupar objetos em um conjunto não é o suficiente para definirmos o que significa contar, para isso precisamos também nos valer do conceito de função que apresentaremos na próxima seção.



Para que tudo isso se eu já sei contar?

## 2.4 Funções

Além das operações entre conjuntos, um outro conceito importante que trataremos aqui é a **relação** entre eles. É bastante comum encontrarmos situações do dia a dia que nos exigem relacionar coisas de naturezas distintas, como por exemplo as relações entre preço e mercadorias, tempo e distância, trabalho e cansaço, estatura e idade, atletas e número de medalhas e por aí vai. Obviamente, aqui estaremos interessados nas relações que podemos explorar matematicamente. Vamos iniciar essa discussão por meio de um outro exemplo.



**Figura 2.7:** Personagens e Armas

A Figura 2.7 apresenta alguns personagens e algumas armas que podem ser utilizadas por eles de acordo com suas respectivas características. Ao caçador marinho, por exemplo, podemos relacionar o arpão; já ao pirata, podemos associar as espadas e, ao policial, podemos associar a arma de fogo. Há, no entanto, uma outra maneira de fazer essa relação por meio de conjuntos. Consideremos

$$P = \{p_1, p_2, p_3\}$$

o conjunto que representa os personagens, em que  $p_1$  corresponde ao caçador,  $p_2$  corresponde ao pirata e  $p_3$  ao policial. Seja ainda

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}$$

o conjunto das armas, em que  $a_1$  representa o arpão,  $a_2$  representa as espadas e  $a_3$  representa a arma de fogo.

Um conjunto  $R$  de pares que podemos formar utilizando um personagem e uma arma de cada vez é o seguinte

$$R = \{(p_1, a_1), (p_1, a_2), (p_1, a_3), (p_2, a_1), (p_2, a_2), (p_2, a_3), (p_3, a_1), (p_3, a_2), (p_3, a_3)\}$$

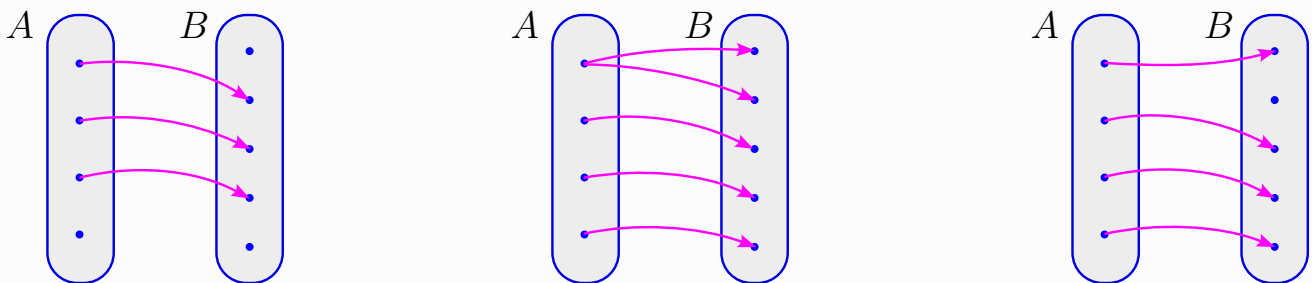
Contudo, se estamos interessados apenas nas situações que relacionam cada personagem à arma que o caracteriza, basta-nos tomar o seguinte subconjunto  $X$  de  $R$

$$X = \{(p_1, a_1), (p_2, a_2), (p_3, a_3)\}$$

Observe que os conjuntos  $R$  e  $X$  representam um modo de relacionar os conjuntos  $P$  e  $A$ . Dessa maneira, podemos construir a seguinte definição

### DEFINIÇÃO 2.13: RELAÇÃO

Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , uma relação entre  $A$  e  $B$  é qualquer subconjunto  $C$  extraído do conjunto formado por todos os pares possíveis de serem formados entre os elementos de  $A$  e de  $B$ .



**Figura 2.8:** Exemplos de relações entre os elementos dos conjuntos  $A$  e  $B$ .

Podemos também exemplificar matematicamente uma relação do dia a dia fazendo uso dessa definição.

Certamente você já ouviu falar em Produto Interno Bruto – PIB. O PIB é a soma de todos os bens e serviços finais produzidos por um país, estado ou cidade, geralmente em um ano. Todos os países calculam o seu PIB nas suas respectivas moedas. Anualmente, o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, o IBGE, calcula e divulga o valor do PIB anual do nosso país, em reais.

Sendo  $A$  o conjunto dos anos desde o primeiro ano em que o PIB foi calculado,  $V$  o conjunto dos valores observados, em trilhões de reais, e  $I$  o conjunto formado por todos os pares  $(x, y)$  em que  $x \in A$  e  $y \in V$ , podemos escrever a relação  $R$  entre  $A$  e  $V$  da seguinte forma

$$R = \{(x, y) \in I \mid y \text{ é o valor do PIB no ano } x\}$$

Para o ano de 2021, onde o PIB brasileiro atingiu a marca dos 8,9 trilhões de reais, temos o par  $(2021; 8,9)$ .

Consideremos agora a seguinte situação. Arthur é dono de uma loja que vende vinhos. Seja  $V$  o conjunto de todos os vinhos que estão disponíveis para venda no estoque da loja. Considere ainda o conjunto  $P$  cujos elementos são os possíveis preços referentes à cada garrafa de vinho contida no estoque. Considere a relação de  $V$  para  $P$  que associa cada garrafa de vinho ao seu respectivo preço.

Excluindo-se as possibilidades de promoções, brindes, cortesias, descontos ou acréscimos para formas específicas de pagamentos, observe que

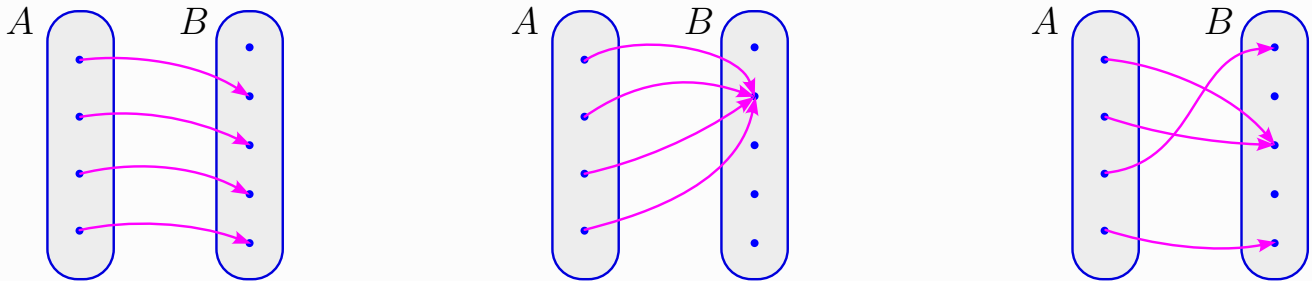
1. Por se tratar de uma loja que vende vinhos, espera-se que, para cada garrafa de vinho ali exposta, exista um preço que se refira a ela. De outra forma, toda elemento do conjunto  $V$  deve se associar à algum elemento do conjunto  $P$ .
2. O preço de cada garrafa deve ser único, isto é, cada elemento do conjunto  $V$  está associado à um único elemento do conjunto  $P$ .

Note também que pode haver algum valor em  $P$  que não corresponda à nenhuma garrafa de vinho. Por exemplo, pode acontecer que na loja do Arthur nenhuma garrafa possa ser comprada pelo valor de R\$ 46,75.

Este tipo de relação, em que as condições 1 e 2 são satisfeitas, é chamada de **função** e formalmente pode ser definida da seguinte maneira.

**DEFINIÇÃO 2.14: FUNÇÃO**

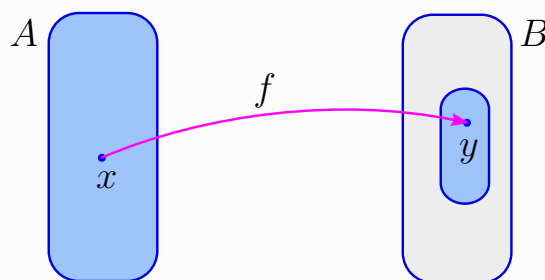
Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos não vazios. Chamamos de **função** entre  $A$  e  $B$ , em notação  $f: A \rightarrow B$ , uma relação  $f$  que associa cada elemento  $x \in A$  a um único elemento  $y \in B$ .



**Figura 2.9:** Exemplos de funções entre os conjuntos  $f: A \rightarrow B$

É comum escrever  $y = f(x)$  para indicar que o elemento  $y \in B$  se relaciona com  $x \in A$  pela função  $f$ . Todavia, é importante diferenciar o significado desses símbolos:  $f$  é a lei que associa cada elemento do conjunto  $A$  ao seu correspondente em  $B$ ; já  $f(x)$  é o valor da função num ponto  $x \in A$ . O conjunto  $A$  é chamado **domínio** da função  $f$ , já o conjunto  $B$  é chamado **contradomínio** de  $f$  e o subconjunto de  $B$  formado pelos elementos que estão associados aos elementos de  $A$  é chamado de conjunto **imagem**. O conjunto imagem pode ser formado por todos elementos do contradomínio ou apenas por uma parte deles.

A Figura 2.10 mostra o domínio, contradomínio e imagem de uma função  $f: A \rightarrow B$ .



**Figura 2.10:** Ilustração do domínio, contradomínio e imagem de uma função  $f: A \rightarrow B$ .



Então isso é função? Mas não foi isso que meus professores me ensinaram...

Certamente você se recorda de algumas funções estudadas em sala de aula. Durante o ensino médio, é feito o estudo das funções afim, quadráticas, modulares, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas. Mas vale ressaltar que essas são apenas algumas das várias funções que podemos explorar em Matemática. Na verdade, essas são funções que, de maneira geral, estabelecem relações entre conjuntos numéricos. Contudo, as funções podem fazer relações entre quaisquer conjuntos, mesmo que não sejam numéricos. Também não é necessário que exista uma expressão ou fórmula que transforme um valor de entrada num valor de saída. Para caracterizar uma função, basta que sejamos capazes de identificar a relação entre os elementos de dois conjuntos, sem ambiguidades.

De forma mais ampla, entre os diferentes tipos de funções, há um grupo delas que reúnem algumas importantes propriedades cujas características irão nos auxiliar no estudo do infinito. Por exemplo, as funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras, que iremos explorar a partir de agora.

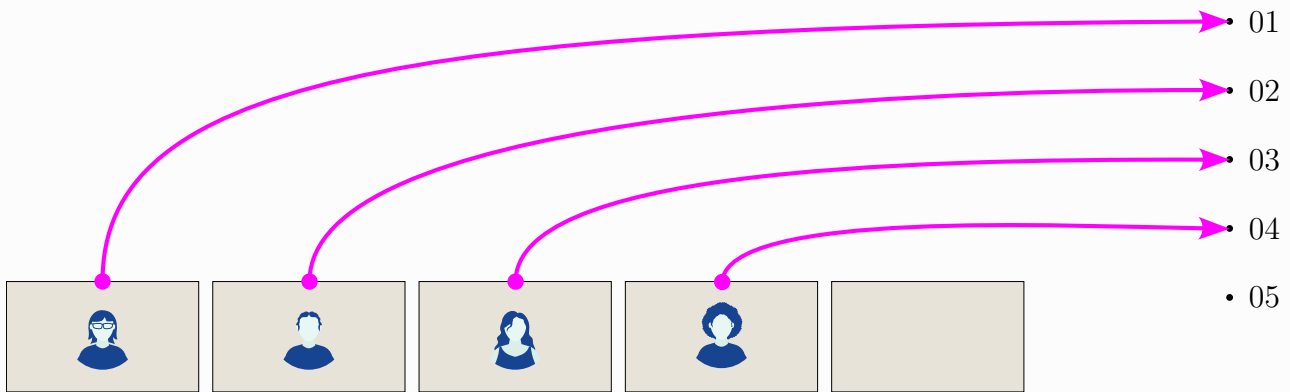
## Injetividade, Sobrejetividade e Bijetividade

---

Suponhamos que o dono de um escritório de contabilidade queira instalar um sistema de ramais para cada um de seus 4 funcionários que trabalham separadamente, cada um em uma sala. Uma empresa especializada no ramo ofereceu um pacote com cinco ramais que poderiam ser facilmente acionados digitando os dois dígitos correspondentes ao número da sala, por exemplo, para falar com o funcionário que trabalha na sala dois, bastaria digitar “02”. Apesar de ainda não possuir cinco funcionários, o dono do escritório resolveu contratar o pacote, pois tinha a intenção de admitir novos funcionários num futuro próximo.

Chamaremos de  $F$  o conjunto formado pelos funcionários desse escritório e de  $R$  o conjunto dos cinco ramais adquiridos. Note que a relação  $f: F \rightarrow R$  é uma função, pois todos os funcionários possuem um único ramal. Por outro lado, a relação  $R \rightarrow F$  não é uma função, pois existe um ramal que não está associado a nenhum funcionário.

Uma característica interessante dessa função é que funcionários diferentes possuem ramais diferentes. Não é possível contatar o funcionário que ocupa a sala três digitando o ramal 04. O ramal 04 é exclusivo do funcionário que ocupa essa sala. Nesse caso, dizemos que a função  $f: F \rightarrow R$  é injetora.



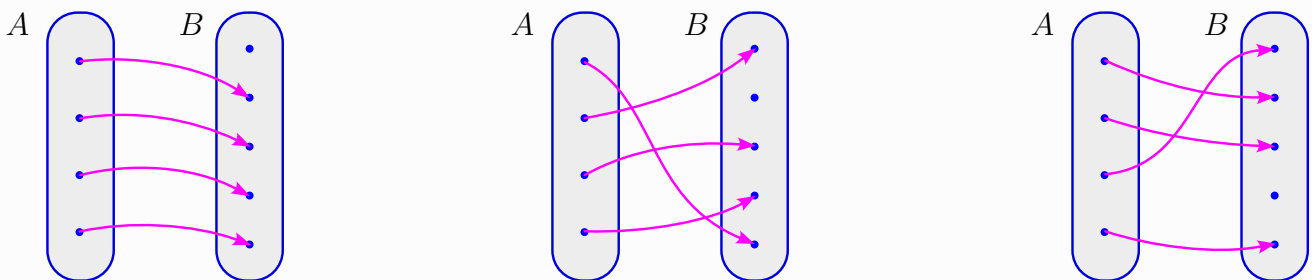
**Figura 2.11:** Ramais 1 – Função injetora

### DEFINIÇÃO 2.15: FUNÇÃO INJETORA

Dizemos que uma função  $f: A \rightarrow B$  é **injetora** se, para quaisquer dois elementos  $x_1$  e  $x_2 \in A$ , se

$$x_1 \neq x_2, \text{ então } f(x_1) \neq f(x_2).$$

Em outras palavras,  $f: A \rightarrow B$  é uma função injetora quando tomados quaisquer dois elementos distintos de  $A$ , suas imagens em  $B$  também devem ser distintas entre si como mostra a Figura 2.12



**Figura 2.12:** Exemplos de funções injetoras

Uma maneira muito utilizada em demonstrações e equivalente à Definição 2.15 para dizer que uma função  $f: A \rightarrow B$  é injetora é: dados  $f(x_1)$  e  $f(x_2) \in B$ ,

$$\text{se } f(x_1) = f(x_2), \text{ então } x_1 = x_2.$$

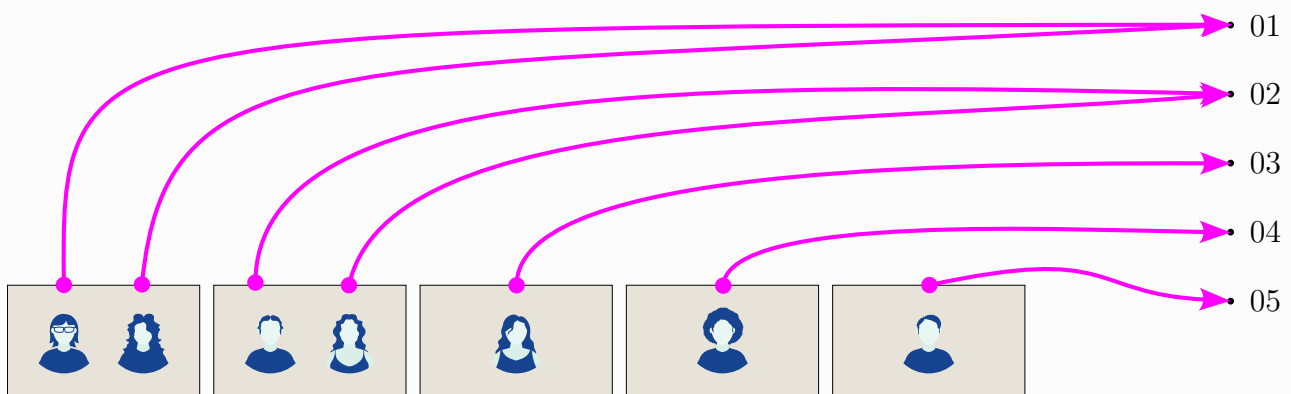
com  $x_1$  e  $x_2 \in A$ .

Voltando aos funcionários e aos seus ramais, veja que, para que uma função seja simplesmente injetora, não há necessidade de que todos os cinco ramais disponíveis correspondam a algum funcionário. De outra forma, na função  $f: F \rightarrow R$  o

contradomínio pode possuir elementos que estão fora do seu subconjunto imagem.

Suponhamos agora que, conforme previsto pelo dono, os negócios evoluíram e três novos funcionários foram contratados. Entretanto, o escritório, apesar de possuir salas o suficiente, possui um contrato que contempla a disposição de apenas 5 ramais, estando apenas um deles disponível. Então, a solução mais simples que o dono encontrou naquele momento foi colocar dois dos novos funcionários em duas salas já ocupadas e compartilhando o mesmo ramal com o colega que ali já se encontrava. As salas contempladas para alocar as duplas foram as de número 01, 02.

Observe que, neste caso, todos os cinco ramais disponíveis estão sendo utilizados pelos funcionários. Quando isso acontece, chamamos a função de sobrejetora.

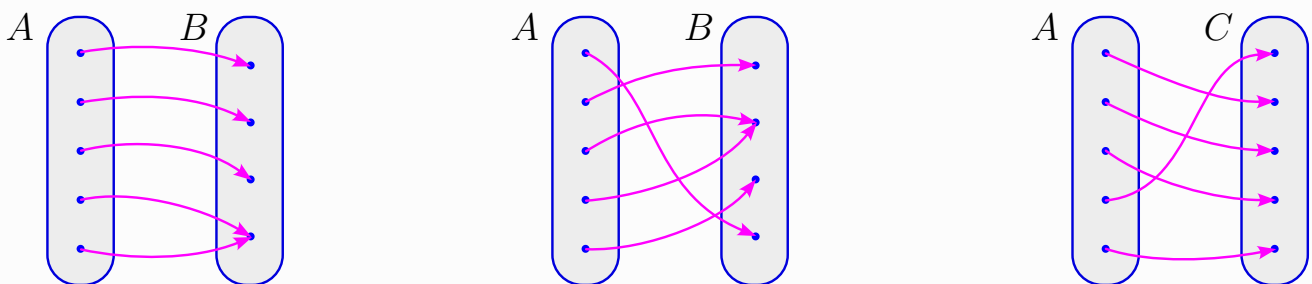


**Figura 2.13:** Ramais 2 – Função sobrejetora

#### DEFINIÇÃO 2.16: FUNÇÃO SOBREJETORA

Uma função  $f: A \rightarrow B$  é **sobrejetora** quando, para todo elemento  $y \in B$  existe algum elemento  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ .

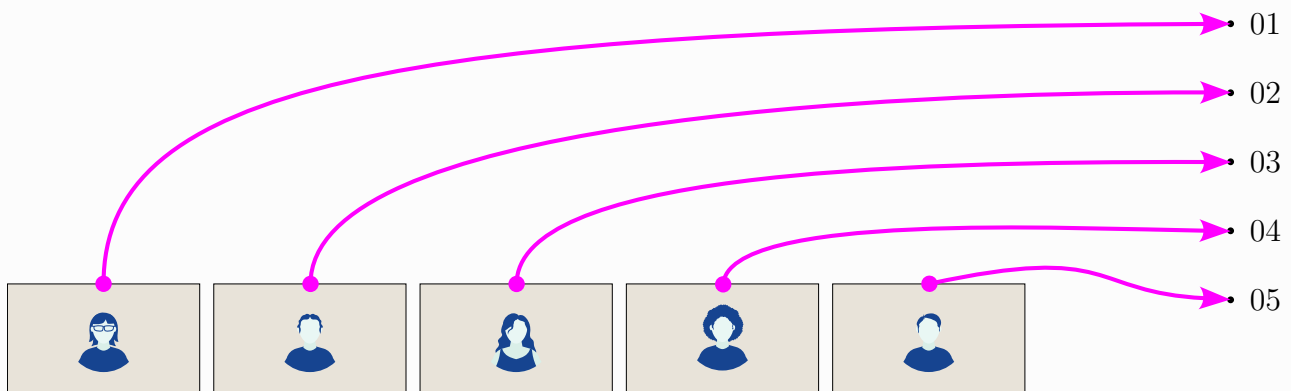
A definição acima diz que todo e qualquer elemento do contradomínio  $B$  deve ser imagem de pelo menos um elemento de  $A$ , ou seja, o conjunto imagem se resume no



**Figura 2.14:** Exemplos de funções sobrejetoras

próprio contradomínio  $B$ . Note ainda que, para que uma função seja simplesmente sobrejetora, apesar da obrigatoriedade de que cada elemento do contradomínio seja imagem de algum elemento do domínio, esse elemento pode ser imagem de mais de um elemento do domínio. Veja a Figura 2.14

Por fim, suponhamos agora que dois funcionários, por questões particulares, decidiram se demitir restando no escritório exatamente cinco funcionários. Dessa maneira os funcionários foram reorganizados de tal forma que cada um deles ficassem com um ramal exclusivo. Neste caso, a relação  $f: F \rightarrow R$  constitui uma bijeção.



**Figura 2.15:** Ramais 3 – Função bijetora

#### DEFINIÇÃO 2.17: FUNÇÃO BIJETORA

Uma função  $f: A \rightarrow B$  é **bijetora** quando  $f$  é sobrejetora e injetora.

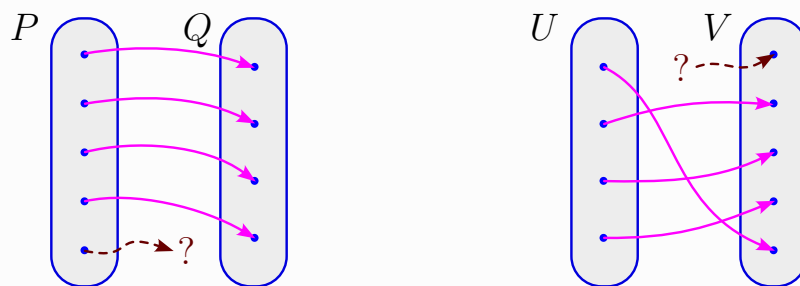
Isto é, uma função  $f$  é bijetora quando um único  $x \in A$  é associado a um único  $y \in B$  e, além disso, todo elemento de  $B$  é imagem de algum elemento de  $A$ . Esse tipo de relação é também conhecida como relação **biunívoca** entre os conjuntos  $A$  e  $B$  e escrevemos  $A \leftrightarrow B$  para indicar que existe uma bijeção entre esses dois conjuntos.

No nosso último contexto, podemos afirmar que a relação  $f: F \rightarrow R$  é uma função bijetora, pois para cada funcionário, de forma particular, existe um único ramal exclusivo para ele. Note ainda que a relação  $g: R \rightarrow F$  também é uma função, pois cada e todo ramal está associado de forma exclusiva à um funcionário. Em situações como essa, podemos afirmar que a função  $g$  é uma **função inversa** da função  $f$ .

Para que uma função seja bijetora é necessário que o seu domínio e seu contra-domínio tenham a mesma quantidade de elementos?



Veja bem, como cada elemento do domínio precisa estar associado à um único elemento do contradomínio e todo elemento do contradomínio precisa ser imagem de algum elemento do domínio, podemos dizer que sim, pois, do contrário, não seria possível estabelecer uma bijeção entre esses dois conjuntos.



**Figura 2.16:** Exemplos de conjuntos onde é impossível estabelecer uma bijeção entre eles.

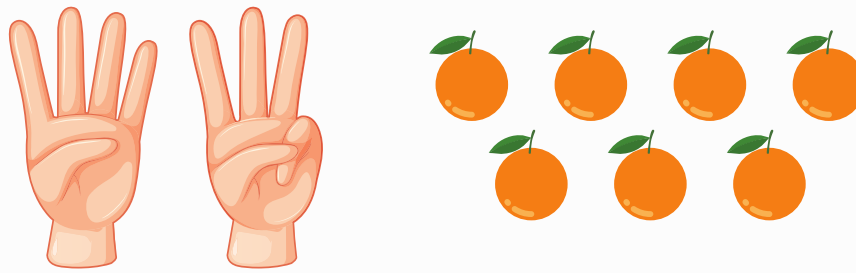
O conceito de bijeção será de grande importância para entendermos os conceitos de cardinalidade de conjuntos que veremos na próxima seção.



Isso está começando a ficar complicado...

## 2.5 Conjuntos Finitos

Quando uma criança usa seus dedos para representar certa quantidade de laranjas em um cesto, o que essa criança faz é associar cada dedo de suas mãos a uma laranja distinta do cesto, ou seja, a criança inconscientemente estabelece uma bijeção entre o conjunto formado pelos seus dedos e o conjunto formado pelas laranjas do cesto, chegando a conclusão que há tantas laranjas quanto seus dedos podem representar.



**Figura 2.17:** Bijeção entre dedos e laranjas.

Essa construção é conhecida também como relação um-a-um de Cantor e se constitui no processo que usamos para contar coisas do nosso dia-a-dia.

Um conceito importante que irá nos ajudar a compreender melhor esse processo é o que chamamos de **cardinalidade**. A cardinalidade de um conjunto é a medida do “número de elementos desse conjunto”. Por exemplo, o conjunto  $V = \{a, e, i, o, u\}$  tem cardinalidade 5, pois possui 5 elementos. Segundo Georg Cantor, dois conjuntos  $A$  e  $B$  possuem a mesma cardinalidade quando é possível estabelecer uma bijeção, ou uma relação de correspondência biunívoca entre os elementos desses dois conjuntos. Esse é um processo natural, mas ao mesmo tempo abstrato que comumente chamamos de contar. O que Cantor fez foi chamar a atenção para esse fato, torná-lo uma definição e apresentar todas as consequências dela.

É provável que todos tenhamos a ideia do que é um conjunto finito. Talvez a descrição mais comum seria “o conjunto finito é aquele que tem fim” ou “aquele cujo número de elementos é finito”, ou seja, intuitivamente, sabemos o que é um conjunto finito. De fato, um conjunto finito é aquele que nos permite contar todos os seus elementos, isto é, mensurar sua cardinalidade.

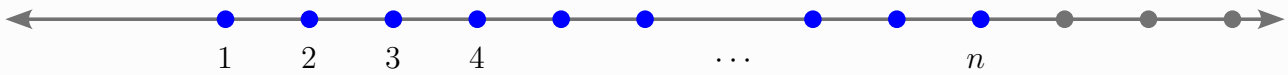
Então, como podemos dizer que o número de grãos de areia em uma praia, ou de estrelas em uma galáxia, é finito se na prática não podemos contar cada um desses objetos?



Para respondermos essa pergunta, primeiramente precisamos de uma definição mais precisa e formal do que é um conjunto finito e, a partir daí, conceituar matematicamente o que é contar. Para isso, vamos inicialmente definir o conjunto  $I_n$  como sendo o conjunto dos números naturais menores ou iguais a  $n$ , isto é

$$I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\},$$

A Figura 2.18 é a representação gráfica desse conjunto.



**Figura 2.18:** Representação do conjunto  $I_n$  na reta numerada

por exemplo, o conjunto dos números naturais menores ou iguais a 5 é

$$I_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

e a Figura 2.19 é sua representação geométrica na reta numerada.



**Figura 2.19:** Representação do conjunto  $I_5$  na reta numerada

Podemos agora definir, sem ambiguidades, o que significa contar todos os elementos de um conjunto, ou seja, o que significa ele ser finito.

#### DEFINIÇÃO 2.18: CONJUNTO FINITO

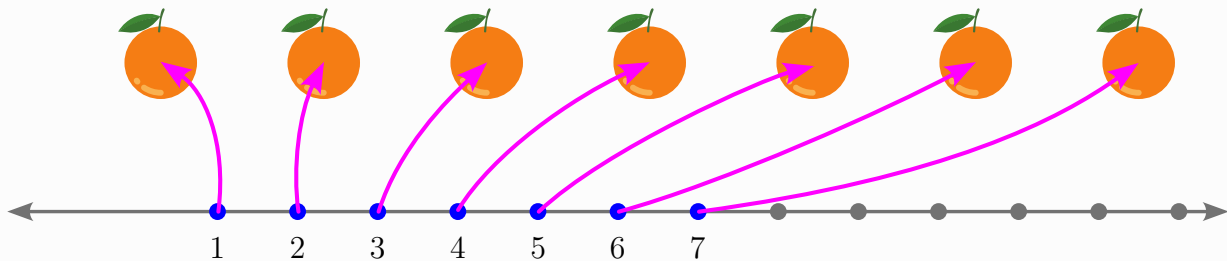
Dizemos que um conjunto  $A$  é **finito** se, para algum  $n \in \mathbb{N}$ , existe uma bijeção entre  $I_n$  e  $A$ .

Dessa forma, e segundo a definição de Cantor, podemos afirmar que, se um conjunto  $A$  é finito, então segue de imediato que  $A$  e  $I_n$  possuem a mesma cardinalidade para algum  $n \in \mathbb{N}$ , e, neste caso,  $n$  é a cardinalidade de  $A$ .

Essa definição também nos permite observar que, caso fosse de nosso interesse obter qualquer informação a respeito de um conjunto finito, independentemente de quais sejam estes elementos, bastaria-nos buscá-la em relação a um conjunto  $I_n$ .

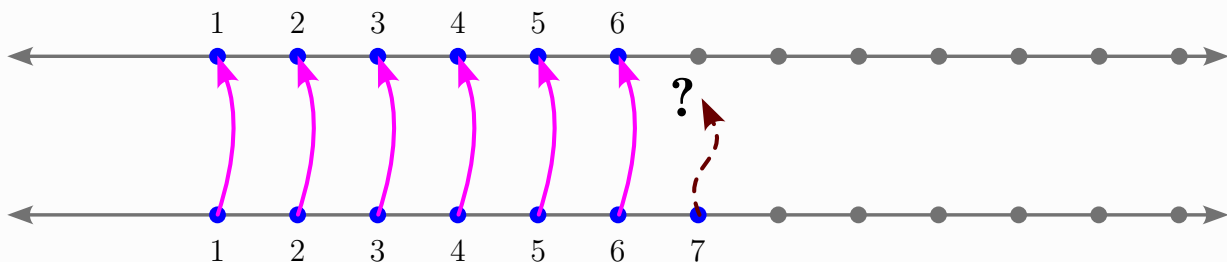
Para exemplificar, podemos retomar a história das laranjas no cesto, se consideramos o conjunto  $A$  como sendo o conjunto cujos elementos são as laranjas e  $n$  como sendo o número de dedos necessários para representá-las, é fácil perceber a bijeção entre  $A$  e  $I_n$ , confirmando assim a finitude do conjunto  $A$ .

Por outro lado, se retirarmos uma laranja do cesto, isto é, um elemento do conjunto  $A$ , deixaremos de obter a relação biunívoca entre as laranjas que sobraram e as que tínhamos inicialmente. Por exemplo, se inicialmente tivéssemos sete laranjas no cesto, então podemos escrever que existe uma bijeção entre  $A$  e  $I_7$ . A Figura 2.20 ilustra essa situação.



**Figura 2.20:** Bijeção entre  $I_7$  e laranjas.

Quando retiramos uma laranja do conjunto  $A$  e formamos o conjunto  $B \subset A$  com as seis laranjas restantes, observamos facilmente que não é possível estabelecer uma relação biunívoca entre  $B$  e  $A$ , uma vez que  $B$  possui a mesma cardinalidade de  $I_6$  e  $A$  de  $I_7$  como ilustrado na Figura 2.21. Observe que isto continua válido mesmo para conjuntos onde não é prático contar seus elementos, como grãos de areia ou estrelas. Neste caso, basta-nos imaginar que existe um número  $n$  grande o suficiente para que os elementos de  $I_n$  represente cada um dos grãos ou das estrelas.



**Figura 2.21:** Impossibilidade de criar uma bijeção entre  $I_6$  e  $I_7$ .

Por fim, também é intuitivo o fato de não ser possível fazer uma relação um a um de todos elementos de um conjunto  $A$  com todos elementos de um conjunto  $B$  sendo esses conjuntos finitos e com quantidades de elementos diferentes. Essa observação motiva o resultado abaixo.

#### TEOREMA 2.19: INEXISTÊNCIA DA BIJEÇÃO

Se  $A$  é um conjunto finito, então não existe uma bijeção entre  $A$  e qualquer subconjunto próprio de  $A$ .



Mas isso é japonês: *Tá-na-cara!*

A demonstração desse teorema se baseia em provar que tal resultado é válido para todo conjunto  $I_n \subset \mathbb{N}$ , ou seja, consiste em mostrar que se  $n \in \mathbb{N}$ , então não pode existir uma bijeção entre  $I_n$  e qualquer um de seus conjuntos próprios.

Para realizar essa demonstração usaremos uma técnica conhecida como **redução ao absurdo ou prova por contradição** que, basicamente, consiste em assumir que a negação de um resultado seja verdadeira e, com isso, concluir que a veracidade da negação implica que a negação é falsa. De forma mais simples, se desejamos demonstrar que um resultado é verdadeiro, basta-nos demonstrar que é impossível que ele seja falso. Vejamos.

### Demonstração

Inicialmente, vamos supor que este resultado seja falso. Logo, deveria existir um  $n \in \mathbb{N}$  em que  $I_n$  teria uma correspondência biunívoca com algum de seus subconjuntos próprios. Sendo assim, podemos considerar que existe um menor número natural  $n_0 > 1$  em que isto aconteça. Ou seja,  $n_0 \in \mathbb{N}$  é o menor número em que existe a uma bijeção

$$f: B \rightarrow I_{n_0},$$

onde  $B$  é um dos subconjuntos próprios de  $I_{n_0}$ . Como

$$I_{n_0} = \{1, 2, 3, \dots, n_0\}$$

e  $f$  é bijetora, existe um  $b \in B$  tal que  $f(b) = n_0$ . Tomemos agora o subconjunto

$$B - \{b\} \subset B$$

e considere a restrição

$$g: B - \{b\} \rightarrow I_{n_0-1}$$

da função  $f$  em  $B - \{b\}$ . Assim,  $g$  seria uma bijeção em  $I_{n_0-1}$ , e  $n_0$  não seria o

menor número natural que iria satisfazer este fato, pois

$$n_0 - 1 < n_0,$$

o que é um absurdo. Portanto, o resultado é verdadeiro.

Segue uma consequência interessante desse teorema.

### TEOREMA 2.20: A INFINIDADE DOS NATURAIS

O conjunto  $\mathbb{N}$  não é finito.

#### Demonstração

Note inicialmente que podemos construir uma relação entre  $\mathbb{N}$  e o subconjunto  $Y$  de  $\mathbb{N}$  tal que  $Y$  é o conjunto dos números pares

$$Y = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 2n, n \in \mathbb{N}\}$$

dada por

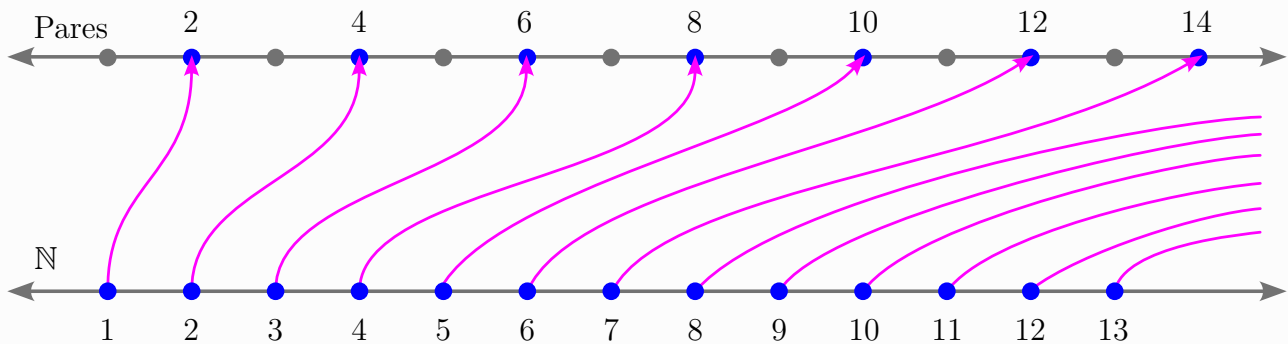
$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\rightarrow Y \\ n &\mapsto y = f(n) = 2n \end{aligned}$$

isto é, cada número natural  $n$  pertencente à  $\mathbb{N}$  será associado ao número  $2n$  pertencente à  $Y$ . Em outras palavras, vamos construir uma relação um a um entre cada número natural e seu respectivo dobro que claramente é par. Observe que essa relação é uma função injetora, pois dados dois números naturais quaisquer, por exemplo  $n$  e  $m$ , se fizermos  $f(n) = f(m)$  teremos  $2n = 2m$ , mas isso é verdade apenas se  $n = m$ . Portanto, de acordo com a Definição 2.15,  $f$  é uma função injetora.

Por outro lado a função  $f$  também é sobrejetora, pois tomado um elemento  $y$  qualquer de  $Y$ , podemos dizer que  $y$  é da forma  $2n$ , pois ele é par. Logo, existe um  $n$  pertencente ao conjunto  $\mathbb{N}$  tal que  $y$  é a sua imagem no conjunto  $Y$ . Finalmente, podemos concluir que a função  $f$  é bijetora.

Sendo assim, acabamos de construir uma bijeção entre o conjunto  $\mathbb{N}$  e um de seus subconjuntos próprios  $Y$ . Pelo teorema 2.19 isso não seria possível caso  $\mathbb{N}$

fosse um conjunto finito, portanto só nos resta concluir que o conjunto  $\mathbb{N}$  não é finito.



**Figura 2.22:** Bijeção  $f: \mathbb{N} \rightarrow \text{pares}$



Ahhh, agora eu entendi! Agora eu saquei! Agora tudo faz sentido!

Com relação a bijeção que construímos acima, há duas observações importantes a serem comentadas. A primeira é o incômodo que tal bijeção pode nos provocar, uma vez que estamos relacionando biunivocamente o conjunto  $\mathbb{N}$  com um de seus subconjuntos próprios, contrariando assim nossa intuição. A segunda observação, essa mais técnica, é o fato do conjunto  $Y$  dos números pares também não ser finito, ou ainda, de maneira geral, por meio da construção de uma bijeção semelhante a esta, podemos demonstrar que nenhum conjunto de números inteiros múltiplos de um inteiro fixo é finito. Por exemplo, os conjuntos formados pelos múltiplos de 3, de 4, de 5 ou qualquer outro número inteiro são todos não finitos.

Seria possível um conjunto finito possuir um subconjunto próprio não finito?



Se sua intuição deu uma resposta negativa a esta pergunta, você está certo. De fato, é possível provar este resultado através do **método indutivo**. O método indutivo, ou **Princípio da Indução Matemática** decorre diretamente do quarto e último axioma de Peano e consiste numa técnica de demonstração que podemos resumir da seguinte maneira: consideremos  $P$  uma propriedade referente aos números naturais. Se a

propriedade  $P$  puder ser verificada para o número 1 (o primeiro elemento do conjunto  $\mathbb{N}$ ) e, se ao assumirmos que ela é válida para um número  $n$  natural, pudermos concluir que a propriedade também é válida para o sucessor genérico de  $n$ , isto é,  $n + 1$ , então a propriedade  $P$  será válida para todos os elementos do conjunto  $\mathbb{N}$ . Munidos dessa informação, vamos demonstrar o seguinte resultado.

### TEOREMA 2.21: SUBCONJUNTOS FINITOS

Todo subconjunto de um conjunto finito é também finito.

#### Demonstração

Seja  $X$  um conjunto finito com  $n$  elementos. Vamos desenvolver nossa demonstração utilizando o método indutivo sobre  $n$ . Se  $n = 1$ , temos  $X = \{a\}$  e o resultado é facilmente verificado, pois seus subconjuntos são apenas o vazio e o próprio  $X$ .

Suponhamos agora o resultado verdadeiro para  $n - 1$  e vamos utilizar o método indutivo para provar que é válido para o seu sucessor  $n$ . Ou seja, partindo do princípio que o resultado seja válido para um conjunto finito com  $n - 1$  elementos, vamos concluir que ele é válido para um conjunto finito  $X$  com  $(n - 1) + 1$  elementos.

Para isso, considere  $Y \subset X$ . Queremos concluir que  $Y$  é finito. De fato, se  $Y = X$  o resultado é imediato e não há nada que se provar, afinal, por hipótese,  $X$  é finito. Vamos supor, então, que  $Y \subset X$  mas,  $Y \neq X$ . Logo, existe um elemento  $a \in X$  tal que  $a \notin Y$ , isto é,  $Y \subset X - \{a\}$ . Ao demonstrarmos que  $X - \{a\}$  é finito com  $n - 1$  elementos, basta-nos utilizar a hipótese de indução para concluirmos que  $Y$  é finito.

De fato, se  $X$  é finito com  $n$  elementos, então existe uma bijeção

$$f: I_n \rightarrow X$$

Podemos supor que  $f(n) = a$ . Sendo assim, se restringirmos a função  $f$  ao conjunto  $I_{n-1}$ , teríamos uma nova bijeção  $g: I_{n-1} \rightarrow X - \{a\}$  com  $g = f$  o que implica, por definição, que  $X - \{a\}$  é finito com  $n - 1$  elementos.

Ah! Então isso garante que  $\mathbb{Z}$  também não é finito?



Boa pergunta! Pelo fato de  $\mathbb{N}$  ser um subconjunto próprio de  $\mathbb{Z}$ , podemos afirmar que  $\mathbb{Z}$  não é finito, pois possui um subconjunto próprio que não é finito.

Pois bem, a partir de agora podemos observar que começa a surgir uma quantidade razoável de conjuntos não finitos fazendo parte de uma nova classe, a classe dos **conjuntos infinitos**, que iremos explorar na seção seguinte.

## 2.6 Conjuntos Infinitos

No final do Capítulo 1, apresentamos o paradoxo conhecido como “O Hotel de Hilbert”. Note que, naquela ocasião, a solução encontrada para o problema de acomodar um novo hóspede passava pela construção de uma bijeção entre o conjunto  $\mathbb{N}$  e um de seus subconjuntos próprios. Observe que cada elemento  $n \in \mathbb{N}$  foi associado ao elemento  $m = n + 1$  pertencente ao subconjunto  $\mathbb{N} - \{1\}$ .

O Hotel de Hilbert é uma ilustração que nos revela como lidar com infinito pode ser algo surpreendente, paradoxal, complexo e as vezes conflituoso. Talvez não faça muito sentido imaginar hotéis cujo números de quartos seja infinito ou pensar numa quantidade infinita de hóspedes. Entretanto, se estamos aqui dispostos a buscar o entendimento sobre o que é o infinito, precisaremos abrir nossas mentes para viajarmos a lugares que não existem no mundo real. Nesse momento, nossas certezas e razões intuitivas devem deixar de ser tratadas como absolutas. Daqui para frente, precisaremos estruturar nossos argumentos pautados em definições e conceitos para que não sejamos vítimas das armadilhas engenhadas por nossas próprias ideias. Iniciaremos essa formalização com seguinte definição a seguir.

### DEFINIÇÃO 2.22: CONJUNTO INFINITO

Um conjunto  $X$  é **infinito** quando ele não é finito.



Jura??? Não me diga!!!

Pois é! Apesar de óbvia, essa definição é suficiente para demonstrarmos que um dos mais importantes conjuntos numéricos estudados em matemática é infinito, o conjunto dos números primos. Como sabemos, um número natural, diferente de 1, é primo quando possui apenas dois divisores: 1 e ele mesmo. Formalmente falando, temos a seguinte definição.

### DEFINIÇÃO 2.23: NÚMEROS PRIMOS

Um número natural  $p$  é chamado de **primo** quando  $p \neq 1$  e não se pode escrever  $p = m \cdot n$  com  $m < p$  e  $n < p$ .

O famoso **Teorema Fundamental da Aritmética** garante que todo número natural é um número primo ou pode ser decomposto de maneira única como um produto entre números primos. Utilizando esse teorema, vamos demonstrar o seguinte resultado.

### TEOREMA 2.24: INFINIDADE DOS PRIMOS

O conjunto  $P$  dos números primos é infinito.

#### Demonstração

Suponhamos que  $P$  seja finito, isto é, existe um número  $p$  que é o maior e o último dos números primos,

$$P = \{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots, p \}.$$

Consideremos agora um número natural  $m$  tal que  $m$  é igual ao produto entre todos os números primos do conjunto  $P$  acrescido do número 1,

$$m = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots p) + 1$$

Pelo Teorema Fundamental da Aritmética,  $m$  é primo, ou  $m$  é um produto entre primos (composto). Contudo, observe que  $m$  não é divisível pelos elementos do conjunto  $P$ , pois ao se dividir  $m$  por qualquer número de  $P$ , o resto dessa

divisão será 1. Dessa forma, chegamos às conclusões de que  $m$  é primo ou  $m$  é um número composto por fatores primos que não estão em  $P$ . Observe que ambas as conclusões conflituam com a formação do conjunto  $P$ , pois se  $m$  for primo, ele deveria estar no conjunto  $P$ , afinal esse conjunto é formado por todos os primos. Por outro lado, se  $m$  for composto, deveria existir outros primos, fora da lista, que o compõe. Logo, só nos resta concluir que o conjunto  $P$  dos números primos é infinito.

Embora a Definição 2.22 seja esclarecedora, ela não é necessariamente prática quando desejamos utilizar ou identificar conjuntos desse tipo. Outra caracterização para tais conjuntos foi desenvolvida. Como vimos anteriormente, nos foi permitido construir bijeções entre o conjunto  $\mathbb{N}$  e alguns de seus conjuntos próprios e isso só foi possível justamente porque  $\mathbb{N}$  é um conjunto infinito.

Faz sentido, mas seria este fato uma exclusividade do conjunto  $\mathbb{N}$ ?



Por sorte nossa, não! Surge aqui, uma eficiente forma de identificar se um conjunto é ou não infinito.

### TEOREMA 2.25: INFINIDADE DE UM CONJUNTO

Um conjunto  $A$  é infinito se, e somente se, existe uma bijeção entre  $A$  e um de seus subconjuntos próprios.

Vamos voltar ao grande hotel Ápeiron do Sr. Hilbert. Imagine que uma imensa locomotiva trazendo infinitos passageiros acaba de parar em uma estação próxima ao hotel e que todos desejam se hospedar em seus aposentos. Você seria capaz de acomodar todos esses infinitos novos hóspedes?

Pois bem, para o caso de termos infinitos hóspedes a serem acomodados no Ápeiron, podemos agir da seguinte maneira: transfere-se o hóspede do quarto 1 para o quarto 2; este do quarto 2 para o quarto 4; o hóspede do quarto 3 para o 6; o do quarto 4 para o 8 e assim sucessivamente. Dessa maneira, cada hóspede passaria ocupar o quarto cujo número seria o dobro daquele que estava ocupando anteriormente. Perceba que, dessa forma, todos os quartos identificados por números pares estariam

ocupados e todos os quartos identificados por números ímpares estariam vazios e aptos a receber os outros infinitos hóspedes.

Uau!!! Mas espere aí, será que o conjunto infinito representado pelos quartos do hotel é maior que o conjunto infinito representado pelos hóspedes?



A pergunta é boa, afinal o hotel já estava lotado e abrigou mais uma quantidade infinita de hóspedes. Entretanto, não se engane meu amigo! Como dissemos anteriormente, aqui as coisas não são como parecem. Primeiramente, perceba que por trás do artifício utilizado para resolver o problema está a bijeção construída entre  $\mathbb{N}$  e o conjunto dos números pares positivo que já exploramos anteriormente. Uma maneira mais simples de visualiza-la é fazendo o emparelhamento entre os hóspedes e os quartos. Note que ao associar cada hóspede ao quarto cujo número é o dobro do ocupado anteriormente, acabamos de mostrar que, para cada número inteiro positivo (hóspede), existe um número par positivo correspondente a ele (quarto), isto é, existem tantos números pares quanto números inteiros positivos, independentemente de serem pares ou ímpares. A bijeção poderia ser feita, por exemplo, alocando os hóspedes nos quartos cuja numeração eram múltiplos de 11. Nesse caso, teríamos provado que o conjunto  $\mathbb{N}$  e o conjunto dos múltiplos de 11 são infinitos de mesmo tamanho, ou ainda, são infinitos de mesma cardinalidade.

Poxa vida! No início desse capítulo, eu havia dito que o conjunto  $\mathbb{Z}$  parecia ter o dobro de elementos de  $\mathbb{N}$  mais o zero, mas agora fiquei na dúvida...



Esse é um tipo de confusão causado pelo infinito! Afinal, a quantidade de elementos do conjunto  $\mathbb{Z}$  representa um infinito “maior” que infinito  $\mathbb{N}$ ?

#### TEOREMA 2.26: CARDINALIDADE DE $\mathbb{Z}$

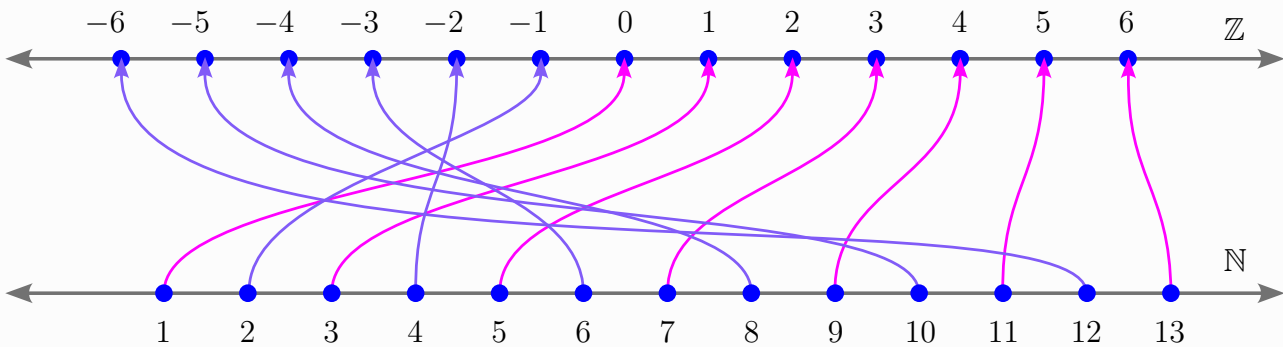
O conjunto  $\mathbb{Z}$  possui a mesma cardinalidade do conjunto  $\mathbb{N}$ .

### Demonstração

Vamos construir a seguinte bijeção de  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  de tal forma que, cada número ímpar do conjunto  $\mathbb{N}$  se relacione com um número inteiro positivo, e cada número par de  $\mathbb{N}$  se relacione com um número inteiro negativo de  $\mathbb{Z}$ , isto é,

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & \text{para } n \text{ ímpar,} \\ -\frac{n}{2}, & \text{para } n \text{ par.} \end{cases}$$

Essa bijeção nos permite concluir que existem tantos números naturais ímpares quanto números inteiros não negativos e tantos números naturais pares quanto inteiros negativos. Portanto, o conjunto  $\mathbb{Z}$  dos números inteiros surpreendentemente é infinito de mesma cardinalidade que os naturais.



**Figura 2.23:** Bijeção  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$

Este resultado nos permite concluir que, apesar de nos parecer impossível contar todos os elementos de um conjunto infinito, às vezes é possível disponibilizar tais elementos em uma lista sem se esquecer de nenhum deles. Esse processo, na verdade, constitui-se em um emparelhamento de cada elemento do conjunto estudado com os elementos do conjunto  $\mathbb{N}$  e recebe o nome de **enumerabilidade**.

#### DEFINIÇÃO 2.27: CONJUNTO ENUMERÁVEL

Um conjunto  $X$  é dito enumerável quando é finito, ou quando existe uma bijeção  $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ .

Por meio da Definição 2.27 e do Teorema 2.26 podemos também concluir que o conjunto  $\mathbb{Z}$  é enumerável. Além disso é possível afirmar, por exemplo, que o conjunto  $P = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$  dos números pares também é enumerável. Afinal, basta-nos tomar a bijeção  $f: \mathbb{N} \rightarrow P$  dada por  $f(n) = 2n$ .

Esse resultado ainda inspira um outro teorema.

### TEOREMA 2.28: SUBCONJUNTOS ENUMERÁVEIS

Todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.

O Teorema 2.28 garante, por exemplo, que todo subconjunto de  $\mathbb{Z}$  é enumerável. Em particular, o conjunto dos números pares, o conjunto dos números ímpares e o conjunto dos números primos são todos conjuntos enumeráveis. Contudo, apesar de termos ciência da existência da bijeção entre esses subconjuntos e o conjunto  $\mathbb{N}$ , por exemplo, nem sempre é fácil exibi-la. O conjunto infinito  $P$  dos números primos é um desses casos. Apesar de termos a garantia de sua existência, até hoje, nenhum matemático conseguiu construir uma bijeção entre  $\mathbb{N}$  e  $P$ . Entretanto, muitos estudiosos tentaram (e ainda tentam) descobrir uma poderosa fórmula que desvende os segredos dos números primos. Um desses matemáticos foi o francês, [Pierre de Fermat](#), que viveu no século XVII.

### Os Números Primos de Fermat

Pierre de Fermat, nasceu em 17 de agosto em 1601, em Beaumont-de-Lomagne, na França. Foi um magistrado e oficial do governo de Toulouse. Sua visibilidade pelos trabalhos desenvolvidos em matemática foi pouco notória naquela época pelo fato de ele não ter o interesse em publicá-los. Apesar de suas importantes contribuições para o desenvolvimento da Geometria Analítica, do estudo de Probabilidade, a estruturação do Cálculo Diferencial e da Teoria de Números, Fermat não tinha a matemática como objeto principal de trabalho, mas como um hobby, recebendo assim o apelido de *Príncipe dos Amadores*.

Em certa oportunidade, Fermat lançou a conjectura que todo número escrito da forma

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$



Pierre de Fermat  
(1601-1665)

em que  $n \in \mathbb{N}$ , era um número primo, isto é,

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$$

$$F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$$

$$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$$

$$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257$$

$$F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537$$

Mais tarde, o matemático suíço [Leonhard Euler](#) provou, por meio de um contraexemplo, que a conjectura não era verdadeira. Euler descobriu que, para  $n = 5$ ,

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297$$

era resultado do produto entre 6 700 417 e 641 e que, portanto, é um número composto.

Mais adiante, veremos alguns outros surpreendentes resultados relacionados à enumerabilidade de conjuntos. Por hora, encerramos aqui nossa discussão sobre os números que usamos para contar, os naturais e os inteiros. Vimos que ambos os conjuntos possuem uma quantidade infinita de elementos, contudo essa não é a única forma de manifestação do infinito. No próximo capítulo, vamos discutir os conjuntos numéricos cujos elementos nos permitem medir distâncias e, com isso, explorar outros tipos de infinitos.

# Números Para Medir

---

|     |                   |    |
|-----|-------------------|----|
| 3.1 | Por que medir?    | 58 |
| 3.2 | Números Racionais | 59 |
| 3.3 | Números Reais     | 68 |

---

## 3.1 Por que medir?

---

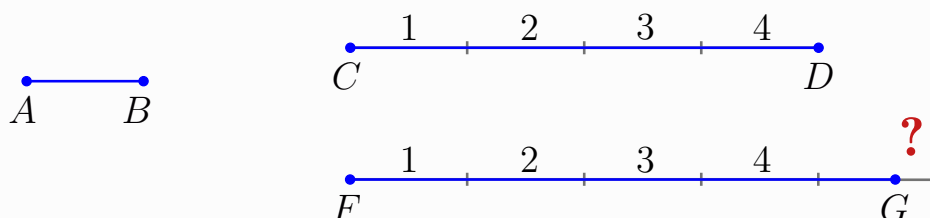
Medir é um processo que, apesar de nos dias atuais ser uma atividade relativamente complexa por ter como interesse atender as demandas da tecnologia e da ciência, também acontece de forma intuitiva muito cedo em nossas vidas. Por exemplo, ao apresentarmos à uma criança da pré-escola uma bolinha de gude e uma bola de futebol, é comum ouvirmos expressões do tipo: “essa bola é maior que aquela”. Mesmo sem haver uma unidade pré-estabelecida, a criança é capaz de estabelecer uma comparação entre o volume da bola de futebol e o volume da bolinha de gude.

Ao longo da história, o desenvolvimento da matemática tem sido fundamental para tornar a medição uma ferramenta poderosa, permitindo-nos quantificar, padronizar, planejar e tomar decisões. A medição não apenas enriquece nosso entendimento do universo, mas também é base para o progresso contínuo da sociedade. Portanto, seja no contexto simples da infância ou na complexidade da era moderna, a medição é uma prática essencial e inestimável para a nossa jornada de descoberta e aprimoramento. Neste capítulo, trataremos dos números que utilizamos para medir.

## 3.2 Números Racionais

A história dos números racionais remonta a civilizações antigas, como egípcios e babilônios, que desenvolveram sistemas de frações para medir terras e quantificar recursos. Na Grécia Antiga, matemáticos como Pitágoras e Euclides estudaram as propriedades e relações dos números fracionários com os inteiros. Com o avanço do conhecimento no mundo islâmico e na Europa durante o Renascimento, novas notações e símbolos foram introduzidos para operar com frações. A formalização do conceito de números racionais ocorreu no século XIX, com a teoria dos números e a álgebra abstrata. A matemática moderna consolidou a compreensão dos números racionais, que hoje são essenciais em diversas áreas do conhecimento, permeando nossa vida cotidiana e problemas mais complexos.

Talvez, uma das principais motivações que o ser humano tenha encontrado para justificar a expansão dos números inteiros tenha sido a necessidade que o mesmo tinha de medir coisas. Medir significa comparar duas grandezas de mesma natureza. A palavra grandeza, derivada do latim *grandis*, refere-se a tudo aquilo que é possível avaliar. São exemplos de grandezas: comprimento, temperatura, massa, tempo, velocidade, volume, área, etc. Medir uma grandeza significa, basicamente, mensurar através de um método comparativo quantas vezes uma parte da grandeza estudada, escolhida arbitrariamente e tomada como unidade, cabe dentro de outra parte dessa mesma grandeza. Por exemplo, tomemos um segmento de reta  $\overline{AB}$  cujo comprimento é 1 e outro segmento  $\overline{CD}$  de comprimento 4. Tomando  $\overline{AB}$  como unidade comparativa, podemos dizer que a medida de  $\overline{CD}$  corresponde a  $4\overline{AB}$ . Contudo, como aferir a medida de um segmento que não comporta um número inteiro de segmentos  $\overline{AB}$ ?



**Figura 3.1:** Medição

Para respondermos essa pergunta, inicialmente apresentamos a seguinte definição.

### DEFINIÇÃO 3.1: NÚMEROS RACIONAIS

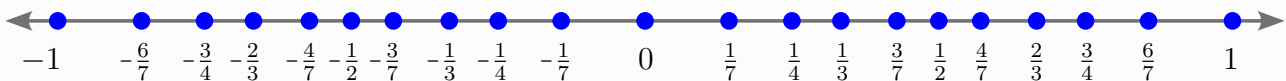
Um número é dito racional se ele puder ser escrito da forma  $\frac{a}{b}$  com  $a$  e  $b \in \mathbb{Z}$  e  $b \neq 0$ .

É importante frisar que uma mesma fração do tipo  $\frac{a}{b}$  pode ser representada por infinitos números inteiros  $a$  e  $b$  e, por isso, vamos tomar  $a$  e  $b$  primos entre si, isto é, o **Máximo Divisor Comum** (MDC) entre eles é 1, fato que torna a fração  $\frac{a}{b}$  única e irredutível.

O conjunto formado por todos os números racionais é representado pelo símbolo  $\mathbb{Q}$  e pode ser descrito formalmente por

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

em que  $\mathbb{Z}^*$  representa o conjunto dos números inteiros com exceção do zero. A Figura 3.2 ilustra alguns números racionais na reta numérica.



**Figura 3.2:** A representação de alguns racionais na reta numérica

Sendo  $\mathbb{Z}$  um subconjunto próprio de  $\mathbb{Q}$ , e segundo o Teorema 2.21 fica claro para todos nós que  $\mathbb{Q}$  também é um conjunto infinito. Contudo, o que podemos afirmar com relação a cardinalidade e a enumerabilidade de  $\mathbb{Q}$ ?

Estou muito inclinado em afirmar que o conjunto  $\mathbb{Q}$  é maior que  $\mathbb{Z}$ , afinal, entre dois números inteiros distintos há um monte de frações...



Mais uma vez, nossa intuição nos direciona a concordar com o nosso amigo. Mas será que estamos certos? Para investigarmos isso, vamos tentar comparar o conjunto  $\mathbb{Q}$  com o conjunto  $\mathbb{N}$ . Consideremos a tabela da Figura 3.3 onde estão expressas

todas as possíveis frações que compõem o conjunto  $\mathbb{Q}$ . Para garantirmos que não nos esqueçamos de nenhuma fração, a tabela foi construída da seguinte forma: na primeira linha, estão escritas todas as frações cujo denominador seja igual a 1, a começar do zero ( $0/1$ ). Observe que ao lado de cada fração positiva também foi incluída a fração negativa correspondente. Essa primeira linha constitui o próprio conjunto  $\mathbb{Z}$ . Na segunda linha, foram dispostas todas as frações cujo denominador é igual a 2 seguindo os mesmos critérios da primeira linha, e assim sucessivamente.

|          | 0             | 1             | -1             | 2             | -2             | 3             | -3             | ... |
|----------|---------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|-----|
| 1        | $\frac{0}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $-\frac{1}{1}$ | $\frac{2}{1}$ | $-\frac{2}{1}$ | $\frac{3}{1}$ | $-\frac{3}{1}$ | ... |
| 2        | $\frac{0}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{2}$ | $-\frac{2}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $-\frac{3}{2}$ | ... |
| 3        | $\frac{0}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{3}$ | $-\frac{3}{3}$ | ... |
| 4        | $\frac{0}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{4}$ | $-\frac{2}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | $-\frac{3}{4}$ | ... |
| 5        | $\frac{0}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $-\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | $-\frac{3}{5}$ | ... |
| $\vdots$ | $\vdots$      | $\vdots$      | $\vdots$       | $\vdots$      | $\vdots$       | $\vdots$      | $\vdots$       |     |

**Figura 3.3:** Contando todas as frações.

É claro que em algumas ocasiões o mesmo número será representado mais de uma vez, por exemplo,  $1/3$ ,  $2/6$ ,  $3/9$ ,  $\dots$ , no entanto, neste momento não estamos preocupados com essas repetições. Nosso interesse aqui constatar que é possível contar todos os elementos de  $\mathbb{Q}$ .

Seguindo o sentido das flechas, podemos observar uma maneira intuitiva de associar cada número natural à uma fração que compõe essa lista. Portanto, esse artifício nos induz a concluir que  $\mathbb{Q}$  é um conjunto enumerável.

**TEOREMA 3.2: ENUMERABILIDADE DOS RACIONAIS**

O conjunto dos números racionais é enumerável.

Note que a conclusão de que o conjunto  $\mathbb{Q}$  é enumerável foi estabelecida por uma percepção diagramada pela Figura 3.3 e não por uma construção teórica rigorosa, pois, neste caso, nosso interesse não foi o de fazer uma demonstração precisa. Porém, para os mais curiosos, deixaremos a seguir a informação de que uma prova formal do Teorema 3.2 pode ser obtida com o encadeamento dos dois lemas descritos a seguir.

**LEMA 3.3: ENUMERABILIDADE CONDICIONADA À SOBREJETIVIDADE**

Seja  $f: A \rightarrow B$  uma função sobrejetiva entre dois conjuntos  $A$  e  $B$ . Se  $A$  é enumerável, então  $B$  também é enumerável.

Chamamos de produto cartesiano o conjunto  $A \times B$  formado por todos os pares ordenados  $(a, b)$  onde a primeira coordenada pertence ao conjunto  $A$  e a segunda coordenada pertence ao conjunto  $B$ .

**LEMA 3.4: ENUMERABILIDADE DO PRODUTO CARTESIANO**

Se dois conjuntos  $A$  e  $B$  são enumeráveis então o conjunto

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B \}$$

também é enumerável.

Munidos desse resultado, agora podemos demonstrar formalmente o Teorema 3.2.

**Demonstração**

Como  $\mathbb{Z}$  é enumerável e  $\mathbb{Z}^*$  é um subconjunto de  $\mathbb{Z}$ , pelo Teorema 2.28, temos que  $\mathbb{Z}^*$  também é enumerável. Portanto, pelo Lema 3.4, o conjunto

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{ (m, n) \mid m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z}^* \}$$

é enumerável. Agora considere a função  $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{Q}$  onde

$$f(m, n) = \frac{m}{n}$$

Note que,  $f$  é sobrejetora. Assim, pelo Lema 3.3, podemos concluir que  $\mathbb{Q}$  é enumerável, já que  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$  o é.

Você já se perguntou quantos números há entre o número 1 e o número 2? Note que a resposta para esse questionamento depende de qual universo estamos lidando. Se nos restringirmos apenas ao conjunto dos números inteiros, nossa resposta seria nenhum. Por outro lado, se nos for permitido recorrer ao conjunto dos números racionais, nossa resposta seria “infinitos!” Uma propriedade interessante do conjunto  $\mathbb{Q}$  é o fato do mesmo ser um conjunto **denso** nele mesmo. Isso significa dizer que, entre quaisquer dois números racionais distintos, sempre existirá um número racional.

### TEOREMA 3.5: $\mathbb{Q}$ É DENSO EM SI MESMO

Entre dois números racionais  $p$  e  $q$  distintos sempre existirá um número racional  $m$  distinto de  $p$  e  $q$ .

#### Demonstração

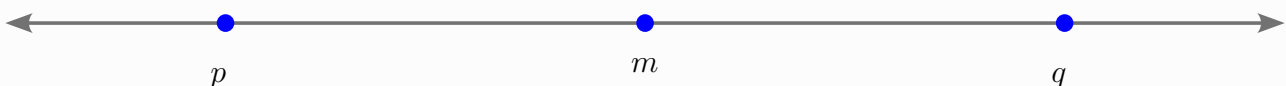
Vamos fazer essa demonstração utilizando novamente o método de redução ao absurdo. Assim, seja  $p$  um racional qualquer e suponha por absurdo que  $q$  seja o próximo racional, isto é, não existe nenhum racional entre  $p$  e  $q$ . Como ambos são racionais, então podemos escrevê-los como razões entre dois números inteiros, isto é,

$$p = \frac{a}{b} \quad q = \frac{c}{d},$$

com  $a, b, c, e d \in \mathbb{Z}$  e  $b$  e  $d$  não nulos. Agora tomemos a média,  $m$ , entre  $p$  e  $q$

$$m = \frac{p+q}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) = \frac{ad+bc}{2bd}$$

Observe que tanto o numerador ( $ad+bc$ ) como o denominador ( $2bd$ ) são inteiros. Portanto, segue que  $m$  é um número racional que está entre  $p$  e  $q$ . A Figura 3.4 ilustra esse resultado



**Figura 3.4:** Sempre existe um racional entre dois racionais quaisquer.

Uma consequência imediata desse resultado é o seguinte **Corolário**.



Coro... quê???

Corolário! É uma expressão que os matemáticos usam quando se pretende exibir uma consequência imediata de um Teorema.



Mas precisa dar um nome que mais se parece com um “trava-línguas”?

Não se preocupe com o nome, mas com o que ele tem a dizer.

### COROLÁRIO 3.6: INEXISTÊNCIA DO MENOR RACIONAL POSITIVO

O conjunto dos racionais positivos não admite um menor elemento.

#### Demonstração

Suponha que um certo número racional  $r > 0$  seja o menor dentre os números racionais positivos. Ao dividirmos  $r$  por 2, por exemplo, encontraremos um novo racional  $s$  tal que

$$s = \frac{r}{2}$$

que é menor que  $r$  mas ainda é maior que zero. Portanto  $r$  não pode ser considerado o menor número racional.

Observe que, se repetirmos o processo acima indefinidamente, encontraremos sempre um valor cada vez mais próximo de zero, mas nunca igual zero, ou seja, algo infinitamente pequeno. Essa ideia é o que chamamos de **Infinitésimo**.

## O Infinitésimo

Um infinitésimo é uma quantidade extremamente pequena, tão próxima de zero quanto desejarmos, mas sem nunca assumir este valor. A principal característica dos infinitésimos é que, embora não possamos atribuir um valor numérico específico a eles, podemos manipulá-los matematicamente com certas regras. É comum representar o infinitésimo pela letra grega **épsilon**,  $\varepsilon$  ou  $\epsilon$ .



A ideia dos infinitesimais surge na Grécia antiga, mas foram os matemáticos do século XVII que perceberam que, ao tratar as quantidades infinitesimais de maneira consistente, poderiam calcular derivadas, integrais e resolver problemas desafiadores que antes pareciam insolúveis. Essa descoberta contribuiu substancialmente para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, revolucionando a matemática e a física.

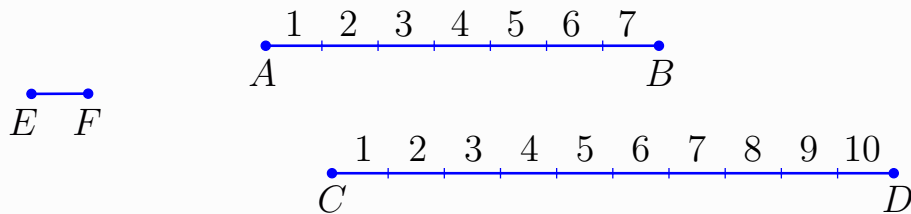
A ideia de infinitésimos também levantou questões filosóficas e lógicas. Alguns matemáticos e filósofos consideraram esses conceitos como problemáticos ou mesmo contraditórios, pois parecia difícil aceitar a ideia de quantidades “infinitesimais” como objetos matemáticos reais. Isso levou a debates e controvérsias por muitos anos. Conforme os conceitos matemáticos foram evoluindo, os infinitésimos foram substituídos por fundamentos mais rigorosos no desenvolvimento do cálculo, utilizando limites e conceitos de continuidade. Apesar de não serem usados na forma original, os infinitésimos desempenharam um papel essencial no progresso da matemática, fornecendo um ponto de partida para o desenvolvimento de conceitos fundamentais e transformando a forma como abordamos problemas em muitas áreas da ciência e engenharia. A ideia de infinitésimos continua a ser um exemplo notável de como abstrações matemáticas podem desempenhar um papel essencial na compreensão do mundo natural e no avanço do conhecimento humano.

Legal!!! Então os números racionais preenchem a reta numérica por completo?



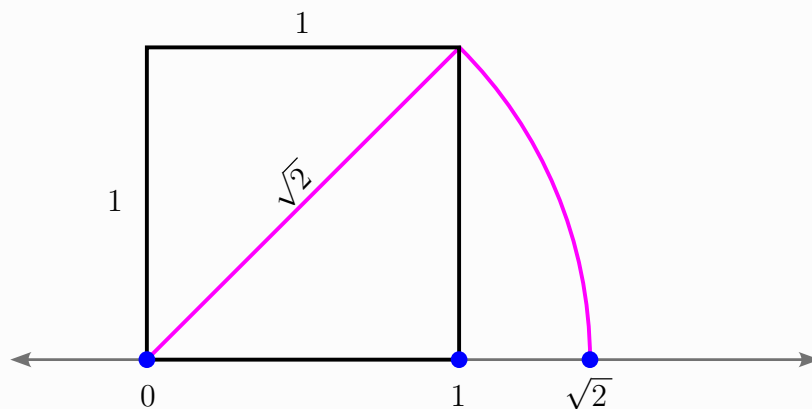
Durante algum tempo, a resposta para este questionamento era positiva. Na Grécia, no tempo de Pitágoras, acreditava-se que os números racionais formavam um conjunto

completo cujos elementos eram suficientes para representar qualquer medida na reta numérica. Em outras palavras, dados dois segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , seria sempre possível encontrar um outro segmento  $\overline{EF}$ , tal que este caberia um número inteiro de vezes no segmento  $\overline{AB}$  e outro número inteiro de vezes no segmento  $\overline{CD}$ , mesmo que fosse necessário tomar  $EF$  muito pequeno. Quando isso acontece, dizemos que  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são segmentos **comensuráveis**, pelo fato de poderem ser medidos simultaneamente pelo segmento  $\overline{EF}$ .



**Figura 3.5:** Comensuráveis

Contudo, os próprios pitagóricos descobriram que nem sempre é possível encontrar um segmento com tais características, isto é, descobriram que existem alguns segmentos que não podem ser medidos por uma unidade comum, estes segmentos são chamados de **incomensuráveis**. Uma maneira de demonstrarmos a existência desses números pode ser feita geometricamente como segue.



**Figura 3.6:** Representação de  $\sqrt{2}$  na reta numérica.

A Figura 3.6 mostra um quadrado de lado 1. A medida da diagonal  $d$  desse quadrado pode ser calculada pelo Teorema de Pitágoras.

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$d = \sqrt{2}$$

Evidentemente o  $\sqrt{2}$  está na reta numérica, como vemos na Figura 3.6. Se a hipótese

da comensurabilidade fosse correta, existiria um número racional tal que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Porém, ao buscarmos os valores  $p$  e  $q$  nos deparamos com um problema, como mostra o teorema a seguir.

### TEOREMA 3.7: IRRACIONALIDADE DA RAIZ DE 2

O número  $\sqrt{2}$  não é racional.

#### Demonstração

Novamente faremos o uso da técnica de redução ao absurdo para provar este resultado.

Suponhamos então, por absurdo, que  $\sqrt{2}$  seja um número racional, isto é,  $\sqrt{2}$  pode ser escrito na forma de uma fração irredutível entre dois números inteiros  $p$  e  $q$ , isto é,

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

onde  $p$  e  $q$  são primos entre si (não podem ser simplificados por um divisor comum). Pois bem, elevando ambos os membros dessa igualdade ao quadrado, temos

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$

que pode ser simplificado em

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

que podemos reescrever como

$$p^2 = 2q^2$$

o que garante que  $p^2$  é par, logo concluímos que  $p$  é par. Então, denotemos  $p = 2k$  com  $k \in \mathbb{Z}$ . Substituindo na equação anterior, vem

$$4k^2 = 2q^2$$

que podemos reorganizar como

$$q^2 = 2k^2$$

e assim concluímos que, a exemplo de  $p$ ,  $q$  também é par.

No entanto, note que o fato de  $p$  e  $q$  serem ambos pares, contradiz nossa hipótese que afirma que estes números são primos entre si, afinal, se ambos são pares, o número 2 é obrigatoriamente um divisor comum. Portanto,  $\sqrt{2}$  não pode ser escrito na forma de uma fração entre dois números inteiros e, conseqüentemente, não pode ser racional.

A demonstração do Teorema 3.7, se constitui como um resultado histórico. Com ele, percebeu-se que os números racionais não eram suficientes para preencher todos espaços na reta numerada, ou seja, apesar de sempre existir um número racional entre dois racionais, ainda existem “buracos” que não podem ser preenchidos por eles. A Figura 3.6 mostra que  $\sqrt{2}$  é um desses buracos. Dessa forma, constatou-se que seria necessário expandir os conjuntos numéricos para além do conjunto dos racionais.

### 3.3 Números Reais

No início deste capítulo, definimos os números racionais como aqueles que podem ser escritos como a razão entre dois números inteiros. Agora, o último resultado da seção anterior nos revelou o surgimento de alguns números que não podem ser considerados racionais e, por isso, os chamaremos de números **irracionais** e o conjunto ao qual eles pertencem é referenciado pelo símbolo  $\mathbb{I}$ .

Apesar dos números irracionais não poderem ser representados como uma fração entre dois números inteiros, tanto eles quanto os racionais podem ser representados na forma decimal.

O número  $\pi$ , por exemplo, pode ser representado na forma decimal da seguinte forma

$$\pi = 3, 1 \ 4 \ 1 \ 5 \ 9 \ 2 \ 6 \ 5 \ 2 \ \dots$$

$$3, \ p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5 \ p_6 \ p_7 \ p_8 \ p_9 \ \dots$$

Onde,

$$\begin{array}{lll} p_1 = 1 & p_4 = 5 & p_7 = 6 \\ p_2 = 4 & p_5 = 9 & p_8 = 5 \\ p_3 = 1 & p_6 = 2 & p_9 = 2 \end{array}$$

isto é, cada  $p_k$  indica a  $k$ -ésima casa decimal de  $\pi$ , com  $k = 1, 2, 3, \dots$

Essa configuração nos serve, inclusive, para distinguirmos esses dois tipos de números. Dessa forma, podemos escrever:

- ◇ Um número é racional se sua representação decimal é finita ou infinita periódica;
- ◇ Um número é irracional se sua representação decimal é infinita e não periódica.

Abaixo seguem alguns exemplos de números racionais e irracionais bem como suas respectivas representações decimais.

$$\frac{19}{4} = 4,75 \quad \in \mathbb{Q}$$

$$\frac{5}{7} = 0,714\,285\,714\,285\,714\,285\,\dots \quad \in \mathbb{Q}$$

$$\sqrt{2} = 1,414\,213\,562\,373\,095\,049\,\dots \quad \notin \mathbb{Q}$$

$$\pi = 3,141\,592\,653\,589\,793\,238\,\dots \quad \notin \mathbb{Q}$$

A reunião entre os números racionais e os números irracionais formam o conjunto dos números **reais**.

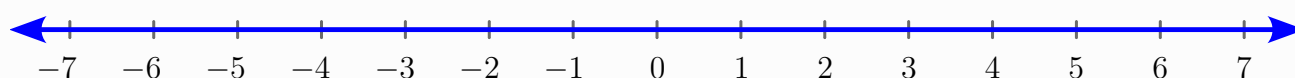
### DEFINIÇÃO 3.8: CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

O conjunto dos números reais,  $\mathbb{R}$  é a união entre os números racionais e os números irracionais. Em simbologia matemática, escrevemos

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

O fato do conjunto  $\mathbb{R}$  ser a união de  $\mathbb{Q}$  e de  $\mathbb{I}$  graficamente significa que, ao disponibilizarmos todos esses números na reta numérica, estaremos preenchendo todos os

“buracos” deixados pelos racionais e, a partir desse momento, nossa reta numérica será chamada de **reta real**, pois agora temos uma bijeção estabelecida entre os números reais e os pontos da reta.



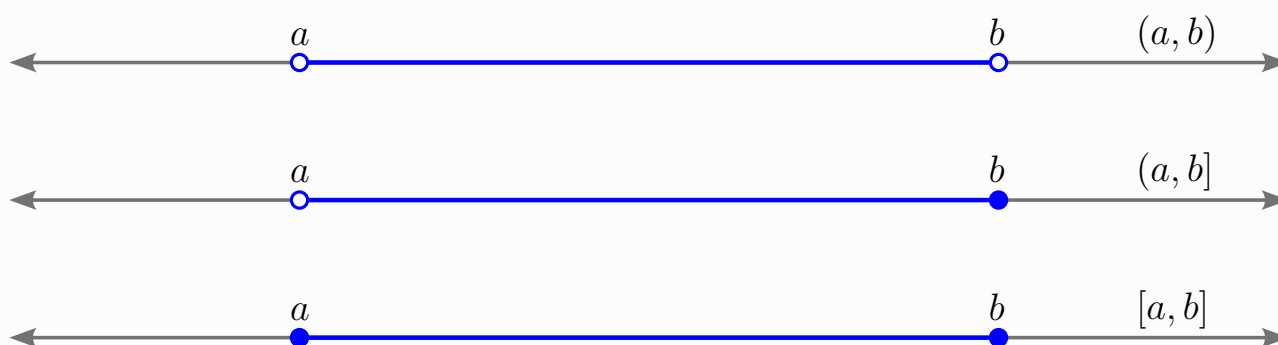
**Figura 3.7:** Reta real.

Em algumas oportunidades, é comum trabalharmos apenas com um “pedaço” da reta real, ou seja, com um subconjunto contínuo dos números reais. Esses subconjuntos são chamados de **intervalos reais** e podem ser definidos da seguinte maneira:

### DEFINIÇÃO 3.9: INTERVALOS REAIS

Tomemos dois números reais  $a$  e  $b$  tais que  $a < b$ . Chamamos de intervalo real  $I$ , de extremos  $a$  e  $b$ , o conjunto formado por todos os elementos  $x$  pertencentes à  $\mathbb{R}$ , tais que estes elementos estejam compreendidos entre  $a$  e  $b$ .

A fim de simplificar essa notação, habitualmente utilizamos os colchetes “[” e “]” para indicar que um dos extremos do intervalo é parte deste intervalo e os parênteses “(” e “)” ou, também, os colchetes invertidos “)” e “[” para indicar o contrário. Graficamente, quando desejamos incluir os extremos no intervalo, utilizamos a bolinha preenchida na reta; quando nosso interesse é não incluir alguns dos extremos, basta representar esse limite por uma bolinha vazia, como mostrado na Figura 3.8.



**Figura 3.8:** Exemplos de Intervalos Reais



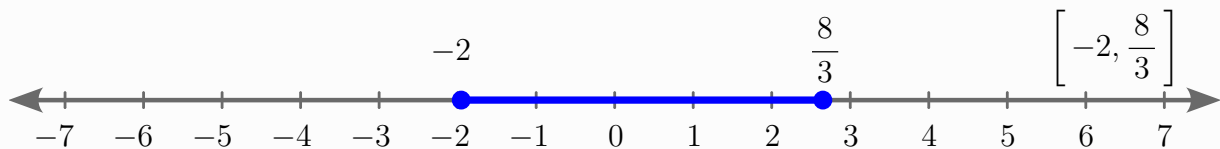
Ahhhh! Lembro-me dessa história de “bolinha aberta” e “bolinha fechada”...

Quando desejamos incluir algum dos extremos,  $a$  ou  $b$ , no próprio intervalo  $I$ , dizemos que o intervalo é fechado naquele valor. Por outro lado, se quisermos excluir algum desses extremos, dizemos que o intervalo é aberto naquele valor. Veja alguns exemplos.

O intervalo abaixo representa todos os números reais compreendidos entre  $-2$  e  $\frac{8}{3}$ , incluindo esses dois extremos.

$$I = \left[-2, \frac{8}{3}\right] = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq \frac{8}{3} \right\}$$

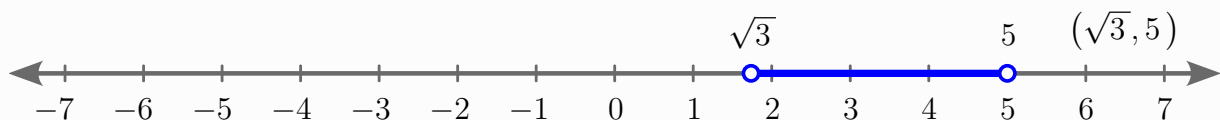
Neste caso, dizemos que  $I$  é fechado em  $-2$  e em  $\frac{8}{3}$ , ou simplesmente fechado.



O intervalo a seguir representa todos os números reais compreendidos entre  $\sqrt{3}$  e  $5$ , em que esses dois extremos são excluídos.

$$I = (\sqrt{3}, 5) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{3} < x < 5 \right\}$$

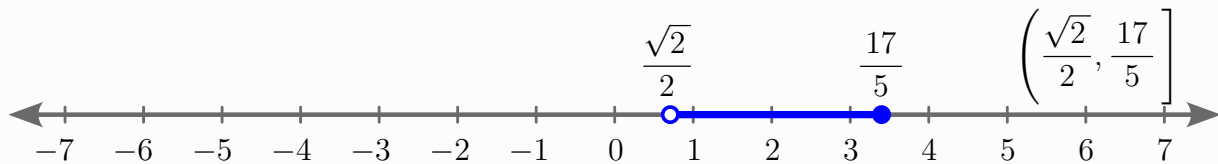
Neste caso,  $I$  é aberto em  $\sqrt{3}$  e em  $5$ , ou simplesmente aberto.



O intervalo abaixo representa todos os números reais compreendidos entre  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $\frac{17}{5}$ , em que se exclui  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  e se inclui o  $\frac{17}{5}$ .

$$I = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{17}{5}\right] = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\sqrt{2}}{2} < x \leq \frac{17}{5} \right\}$$

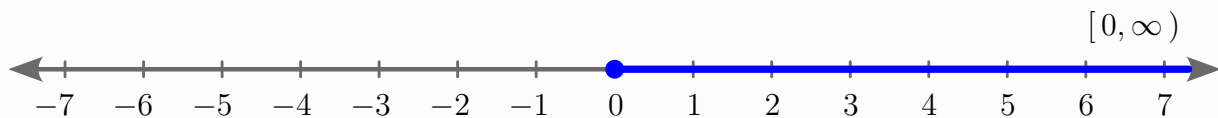
Neste caso, dizemos que  $I$  é aberto em  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  e fechado em  $\frac{17}{5}$ .



Na definição de intervalos é comum usarmos o símbolo  $\infty$  para indicar que o intervalo não tem limite inferior ou superior. Os próximos exemplos ilustram esse uso.

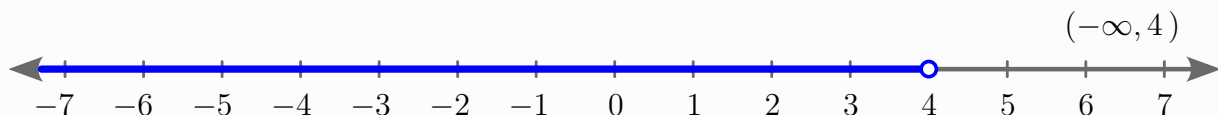
Um intervalo que inclui todos os números reais maiores ou iguais a zero é escrito como

$$I = [0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$



Um intervalo que inclui todos os números reais menores do que 4 é escrito como

$$I = (-\infty, 4) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$$



Note que quando usamos o  $\infty$  para definir um extremo de um intervalo esse extremos sempre é aberto. Afinal  $\infty$  não é um número e portanto não pode pertencer a  $\mathbb{R}$ .

Gostei! Mas agora vem a pergunta que não quer calar:  
 $\mathbb{R}$  também é um conjunto enumerável?



Essa pergunta realmente é muito interessante, mas Georg Cantor, após muito esforço, descobriu que não. Embora tenhamos uma impressão de que os conjuntos  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R}$  tenham estruturas equivalentes, isto não é verdade. Cantor percebeu que não poderia haver uma bijeção entre  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{R}$ . A injetividade da função  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  é clara: basta-nos associar cada  $n$  de  $\mathbb{N}$  nele próprio, em  $\mathbb{R}$ . Contudo, não é possível estabelecer uma

sobrejetividade entre  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{R}$ . Apesar de seu nível de complexidade, exibiremos abaixo uma demonstração formal desse resultado.

Para iniciarmos, vamos concentrar nossos olhares no intervalo

$$(0, 1) = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \}.$$

Sabemos que este intervalo é um subconjunto de  $\mathbb{R}$ .

Segundo o Teorema 2.28, se mostrarmos que  $(0, 1)$  não é enumerável, teremos mostrado que  $\mathbb{R}$  também não é. Assim, enunciamos o seguinte resultado.

### TEOREMA 3.10: NÃO ENUMERABILIDADE DE $(0, 1)$

O intervalo  $(0, 1)$  não é enumerável.

#### Demonstração

Vamos supor, por absurdo, que o intervalo  $(0, 1)$  seja enumerável, nesse caso, existe uma bijeção,  $f: \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$ , entre os naturais e cada número no intervalo de modo que para todo  $a_n \in (0, 1)$  temos

$$f(1) = a_1, \quad f(2) = a_2, \quad f(3) = a_3, \quad \dots \quad f(n) = a_n, \quad \dots,$$

como ilustrado na Figura 3.9.

Vamos considerar agora a representação decimal dos números reais  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , compreendidos no intervalo  $(0, 1)$ , isto é,

$$\begin{array}{l} a_1 = 0, \quad a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14} \quad a_{15} \quad a_{16} \quad a_{17} \quad a_{18} \quad a_{19} \quad \dots \\ a_2 = 0, \quad a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \quad a_{24} \quad a_{25} \quad a_{26} \quad a_{27} \quad a_{28} \quad a_{29} \quad \dots \\ a_3 = 0, \quad a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \quad a_{34} \quad a_{35} \quad a_{36} \quad a_{37} \quad a_{38} \quad a_{39} \quad \dots \\ a_4 = 0, \quad a_{41} \quad a_{42} \quad a_{43} \quad a_{44} \quad a_{45} \quad a_{46} \quad a_{47} \quad a_{48} \quad a_{49} \quad \dots \\ a_5 = 0, \quad a_{51} \quad a_{52} \quad a_{53} \quad a_{54} \quad a_{55} \quad a_{56} \quad a_{57} \quad a_{58} \quad a_{59} \quad \dots \\ \vdots \end{array}$$

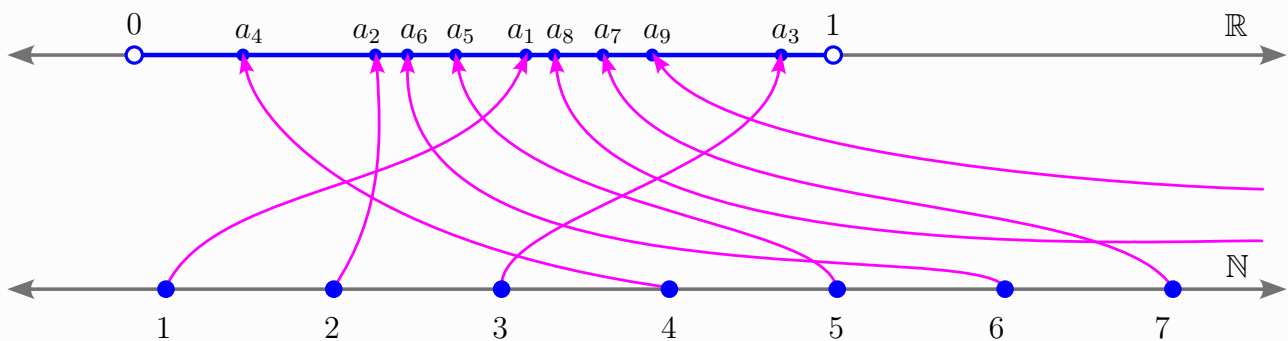
Agora, se tomarmos um número  $x \in (0, 1)$  tal que

$$x = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots$$

de maneira que

$$b_1 \neq a_{11}, \quad b_2 \neq a_{22}, \quad b_3 \neq a_{33},$$

e assim por diante, notamos que  $x$  é diferente de todos os  $a_1, a_2, a_3, \dots$  listados, pois todas as casas decimais de  $x$  seriam diferentes de  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, \dots$ . Isto nos mostra que não existiria um  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f(n) = x$ , ou seja, que  $f$  não seria sobrejetora, o que é um absurdo. Portanto, o intervalo  $(0, 1)$  não pode ser enumerável.



**Figura 3.9:** Bijeção entre  $\mathbb{N}$  e o intervalo  $(0, 1)$

Dessa forma, podemos agora enunciar

### TEOREMA 3.11: $\mathbb{R}$ É NÃO ENUMERÁVEL

$\mathbb{R}$  não é um conjunto enumerável

#### Demonstração

Sendo o intervalo

$$(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$$

um subconjunto não enumerável  $\mathbb{R}$ , pelo Teorema 2.28,  $\mathbb{R}$  é não enumerável.

Para finalizar, vimos anteriormente que  $\sqrt{2}$  não é um número racional, porém, não é difícil percebermos que podemos construir números racionais cujos valores se aproximariam de  $\sqrt{2}$ . Vejamos.

Tome inicialmente a representação decimal de  $\sqrt{2}$

$$\sqrt{2} = 1,414\,213\,56\dots$$

Note que a reticências aqui é necessária, pois os algarismos decimais da sua representação não pode ser finita, pois se assim fosse o  $\sqrt{2}$  seria racional. Este fato nos permite construir infinitos números racionais menores que  $\sqrt{2}$ ,

$$\begin{aligned}d_1 &= 1,4 &= \frac{14}{10} \\d_2 &= 1,41 &= \frac{141}{100} \\d_3 &= 1,414 &= \frac{1414}{1000} \\d_4 &= 1,4142 &= \frac{14142}{10000} \\&\vdots\end{aligned}$$

fazendo o truncamento das casas decimais como em cada valor acima. Sem muitas dificuldades percebemos que os valores dos números da lista, isto é, da sequência

$$d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, \dots$$

vão se tornando cada vez mais próximos do valor de  $\sqrt{2}$ , dando-nos uma ideia intuitiva de que o valor de  $\sqrt{2}$  é um valor limitante dos valores desta sequência infinita de termos.

O mais interessante, é que este fato não é um privilégio apenas de  $\sqrt{2}$ . Isso significa que, dado um número real qualquer, é sempre possível encontrar uma lista de números racionais que se aproximam dele. O que nos diz que  $\mathbb{Q}$  também é denso sobre  $\mathbb{R}$ .

### TEOREMA 3.12: DENSIDADE DE $\mathbb{Q}$ SOBRE $\mathbb{R}$

O conjunto  $\mathbb{Q}$  é denso sobre o conjunto  $\mathbb{R}$ .

Além disso, este fato também nos leva para outro universo matemático em que o infinito está muito presente. O universo das sequências numéricas, que trataremos no próximo capítulo.

# Calculando o Infinito

---

|     |                      |    |
|-----|----------------------|----|
| 4.1 | Introdução . . . . . | 76 |
| 4.2 | Sequências . . . . . | 77 |
| 4.3 | Séries . . . . .     | 98 |

---

## 4.1 Introdução

---

O estudo acerca das sequências numéricas são base para o entendimento do comportamento de funções e se constituem como um dos pilares fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral. O estudo sistematizado das sequências é essencial para avaliarmos a [continuidade](#) e [diferenciabilidade](#) de funções, permitindo-nos compreender seu comportamento em diferentes pontos e identificar elementos especiais, como [assíntotas](#) e [descontinuidades](#).

As séries numéricas, por sua vez, são somas infinitas de termos de uma sequência. A análise dessas séries é também de significativa importância para o Cálculo. Elas permitem compreender funções complexas como somas infinitas de potências, tornando possível aproximar funções complicadas por meio de polinômios e simplificando o cálculo de [limites](#) e [integrais](#). As chamadas [séries de Taylor e Maclaurin](#) também fornecem uma ferramenta poderosa para o desenvolvimento de funções. Através dessas séries, podemos criar aproximações de ordem superior para funções, o que é crucial para a resolução de problemas matemáticos, físicos e de engenharia.

Neste capítulo, faremos um breve estudo sobre as sequências e séries que são a base para os principais resultados trabalhados no Cálculo. Aqui, trataremos apenas dos conceitos básicos que irão subsidiar nossas buscas para melhor entendimento do infinito.

## 4.2 Sequências

Uma prática muito comum entre nós, seres humanos, é a de listar coisas. Criamos listas de nomes, de números de telefones, de itens de supermercado, de ingredientes para uma receita e etc. No que diz respeito à matemática, certamente uma das primeiras listas que nós produzimos ainda na infância foi a dos primeiros números naturais  $(1, 2, 3, \dots, 10)$ . Esse tipo de lista ordenada recebe o nome de **sequências numéricas** e são formadas de acordo com determinadas regras.

Vamos iniciar nossos estudos apresentando a definição de sequências numéricas. Essa definição pode ser encontrada na maioria dos livros de cálculo e análise, como por exemplo em *Curso de análise – Volume 1* de Elon Lages Lima [10], *Introdução À Análise Matemática* de Geraldo Ávila [2]. O texto a seguir se baseia na *Apostila de Cálculo IV* de Luis Alberto D'Afonseca [4].

### DEFINIÇÃO 4.1: DEFINIÇÃO DE SEQUÊNCIAS

Uma **sequência** é uma lista de números em uma ordem determinada

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \dots, \quad a_n, \quad \dots$$

Cada  $a_i$  é um **termo** da sequência, enquanto  $i$  é o **índice** com  $i = 1, 2, 3, \dots$

De maneira equivalente, podemos definir uma sequência como uma função,  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , dos números naturais (índices) nos números reais (termos). Dessa forma, os termos da sequência são

$$a_1 = f(1), \quad a_2 = f(2), \quad a_3 = f(3), \quad \dots, \quad a_n = f(n), \quad \dots$$

Uma característica importante na exposição de uma sequência é que seus elementos são apresentados em uma **ordem específica**. É justamente essa particularidade que diferencia uma sequência de um conjunto enumerável de valores. Devido a essa

disposição, é possível ter duas sequências diferentes que contêm exatamente os mesmos elementos. Em outras palavras, a ordem em que os elementos aparecem é um fator determinante para a identidade e distinção de sequências, permitindo que diferentes arranjos resultem em sequências distintas, mesmo que os elementos em si sejam os mesmos. É comum observarmos nos livros representações de sequências com os termos entre chaves

$$\{a_n\} = \{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\}.$$

Porém, como vimos, a notação com chaves também é usada para representar conjuntos, onde a ordem dos elementos não é relevante, isso é, os conjuntos  $\{a, b, c\}$  e  $\{c, b, a\}$  são idênticos. Assim, escolhemos a notação com parênteses para enfatizar essa característica, isso é, as sequências

$$\begin{aligned}(a_n) &= (1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots), \\ (b_n) &= (2, 1, 4, 3, \dots, 2n, 2n-1, \dots)\end{aligned}$$

são diferentes apesar de possuírem os mesmos elementos.

Uma sequência pode ser finita, isto é, possuir um número finito de termos ou ainda infinita quando possui infinitos termos. Neste trabalho estamos mais interessados nas sequências infinitas.

Quando precisamos representar os termos de uma sequência, é comum nos referirmos a estes como

$$(a_n) \quad \text{ou} \quad (b_n).$$

Quando necessário, podemos explicitar os valores para o índice

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \quad \text{ou} \quad (b_i)_{i=0}^{\infty},$$

em resumo,

$$(a_n) = (a_n)_{n=0}^{\infty} = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots).$$

A maneira como os termos de uma sequência são obtidos não afeta a aplicação dos resultados teóricos. No entanto, pode ter um impacto significativo quando se deseja realizar manipulações algébricas com esses termos. Existem duas abordagens principais para calcular os termos de uma sequência: usando uma **expressão direta**

ou estabelecendo uma **relação de recorrência**. Ambas as formas são comumente empregadas e podem ser utilizadas para encontrar os valores da sequência, mas a escolha entre elas dependerá da situação específica e da conveniência matemática. No caso da expressão direta, temos uma fórmula explícita para o valor em função do índice. Observe os exemplos

$$a_n = \sqrt{n}, \quad b_n = \ln(n), \quad c_n = \frac{1}{n^2}.$$

Na **Relação de Recorrência** o valor de um termo da sequência é calculado a partir do termo anterior, ou dos anteriores. Nesse caso, dizemos que a sequência é **recursiva**. A **Sequência de Fibonacci**, que vimos no Capítulo 1, é o exemplo mais famoso desse tipo de sequência. Aqui, após definirmos o primeiro e o segundo termo ambos iguais a 1, cada termo dessa sequência, a partir do terceiro, é calculado por meio da soma dos dois termos imediatamente anteriores, isto é,

$$f_1 = 1 \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad n \geq 3.$$

Ao expandirmos essa sequência obtemos,

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = 1$$

$$f_3 = f_1 + f_2 = 1 + 1 = 2$$

$$f_4 = f_2 + f_3 = 1 + 2 = 3$$

$$f_5 = f_3 + f_4 = 2 + 3 = 5$$

$$f_6 = f_4 + f_5 = 3 + 5 = 8$$

$$f_7 = f_5 + f_6 = 5 + 8 = 13$$

E assim sucessivamente para todo  $n$ .

Outros exemplos de sequências são a **Progressão Aritmética** e a **Progressão Geométrica** definidas a seguir.



Opa! Eu me lembro bem da P.A. e da P.G.!

**DEFINIÇÃO 4.2: PROGRESSÃO ARITMÉTICA**

Chamamos de progressão aritmética (P.A.) toda sequência de números na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença é chamada de **razão** da progressão e representada pela letra  $r$ .

As sequências

$$(-3, -1, 1, 3, 5, \dots)$$

e

$$(11, 7, 3, -1, -5, \dots)$$

são progressões aritméticas cujas razões valem respectivamente 2 e  $-4$ .

Numa progressão aritmética,  $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$ , partindo do primeiro termo  $a_1$ , para avançarmos para o segundo termo, basta somar a razão; para avançarmos para o terceiro termo, basta somar duas vezes a razão; para avançarmos para o quarto termo, devemos somar três vezes a razão, e assim por diante. Dessa forma, seguindo esse processo, podemos construir o termo geral da P.A. Observe a sequência dos cinco primeiros termos de uma P.A.

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r$$

$$a_5 = a_4 + r = (a_1 + 3r) + r = a_1 + 4r$$

Note que a expressão geral de cada termo é dada pela soma do primeiro termo mais  $(n - 1)$  vezes o valor da razão  $r$ . Logo podemos escrever o termo geral da P.A. seguinte forma

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

**DEFINIÇÃO 4.3: PROGRESSÃO GEOMÉTRICA**

Chamamos de progressão geométrica (P.G) toda sequência de números não-nulos na qual o quociente da divisão entre cada termo e o termo anterior é uma valor constante. Essa quociente é chamado de **razão** da progressão e representado pela letra  $q$ .

As sequências

$$( 2, 10, 50, 250, 1250, \dots )$$

e

$$( 81, 27, 9, 3, 1, \dots )$$

são progressões geométricas cujas razões valem respectivamente 5 e  $\frac{1}{3}$ .

Numa progressão geométrica,  $( b_1, b_2, b_3, b_4, \dots )$ , partindo do primeiro termo  $b_1$ , para avançarmos para o segundo termo, basta multiplicar pela razão; para avançarmos para o terceiro termo, basta multiplicar duas vezes pela razão; para avançarmos para o quarto termo, devemos multiplicar três vezes pela razão, e assim por diante. Dessa forma, seguindo esse processo, podemos construir o termo geral da P.G. Observe a sequência dos cinco primeiros termos de uma P.G.

$$b_1$$

$$b_2 = b_1 q$$

$$b_3 = b_2 q = (b_1 q) q = b_1 q^2$$

$$a_4 = b_3 q = (b_1 q^2) q = b_1 q^3$$

$$a_5 = b_4 q = (b_1 q^3) q = b_1 q^4$$

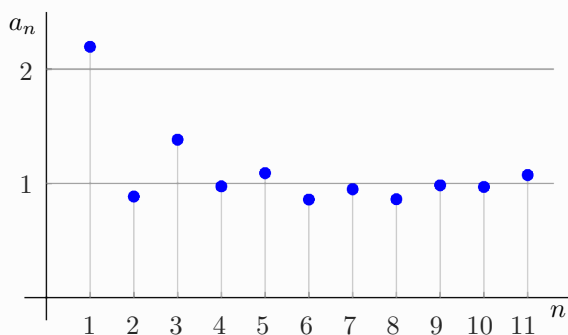
Note que a expressão geral de cada termo é dada pelo produto entre primeiro termo e a razão  $q$  elevada a potência  $(n - 1)$ . Logo podemos escrever o termo geral da P.G. seguinte forma

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

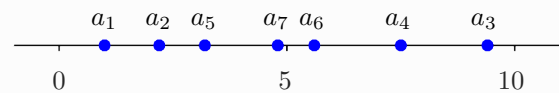


Nada de novidade até agora...

As sequências podem ser representadas graficamente de maneira similar ao gráfico de uma função real  $y = f(x)$ , traçando pontos em um plano cartesiano. No entanto, há uma diferença fundamental: no caso das sequências, os pontos são isolados e possuem os valores dos índices no eixo- $x$ , como ilustrado na Figura 4.1a. Além da forma cartesiana, também podemos representar os valores dos termos em um único eixo, como demonstrado na Figura 4.1b.



(a) Representação de uma sequência em um plano cartesiano.



(b) Representação de uma sequência sobre um eixo.

**Figura 4.1:** Representação gráfica de sequências.

A seguir, apresentamos alguns exemplos de sequências definidas diretamente por expressões que envolvem o índice. Veja a explicitação dos primeiros termos de algumas sequências e de seus respectivos gráficos.

Considere a sequência em que todos os termos são iguais a 1, isto é,

$$a_n = 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

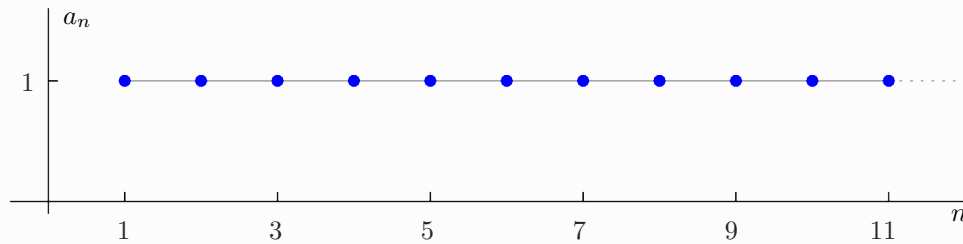
Seguem explícitos os cinco primeiros termos dessa sequência.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 1, \quad a_5 = 1$$

Escrevendo na notação de sequências temos

$$(a_n) = (1, 1, 1, 1, 1, \dots).$$

A representação gráfica de  $(a_n)$  pode ser observada abaixo.



É válido ressaltar que a linha conectando os pontos não faz parte do gráfico da sequência, ela foi incluída apenas para facilitar a visualização da ordem dos pontos. Note ainda que independente do índice  $n$ , todos os termos dessa sequência são iguais a constante 1 e, portanto, quando  $n$  vai para o infinito é fácil ver que a sequência  $a_n$  vai (ou permanece) para o número 1.



Ok! Mas qual é a relevância disso?

Calma, vamos primeiro estudar o comportamento de mais algumas sequências.

Considere agora a sequência em que os termos de ordem ímpar são iguais a 0 e os termos de ordem par são iguais a 2, isto é,

$$a_n = 1 + (-1)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Seguem explícitos os cinco primeiros termos dessa sequência.

$$a_1 = 1 + (-1)^1 = 0$$

$$a_2 = 1 + (-1)^2 = 2$$

$$a_3 = 1 + (-1)^3 = 0$$

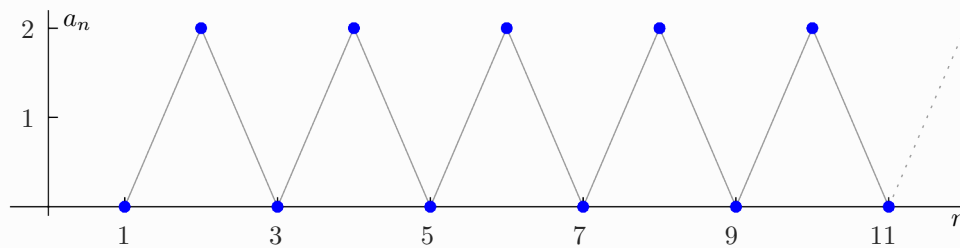
$$a_4 = 1 + (-1)^4 = 2$$

$$a_5 = 1 + (-1)^5 = 0$$

Escrevendo na notação de sequências temos

$$(a_n) = (0, 2, 0, 2, 0, \dots) .$$

A representação gráfica de  $(a_n)$  pode ser observada abaixo.



Observe que os termos dessa sequência oscilam entre os valores 0 e 2 de acordo com a paridade de seu índice  $n$ . Neste caso, note que a sequência não se aproxima de um valor único, sendo impossível cravar qual é o seu comportamento quando  $n$  vai para infinito.



Ela está indo para dois números ao mesmo tempo, ora!

Entendo o que você quer dizer, mas perceba que quando  $n$  vai para o infinito, não sabemos se estamos lidando com um número par ou ímpar para cravarmos se  $a_n$  é 1 ou se é 2, afinal o infinito não é um número, certo?

Considere a sequência em que os termos são frações cujo numerador é igual a 1 e o denominador é igual a  $n$ , isto é,

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

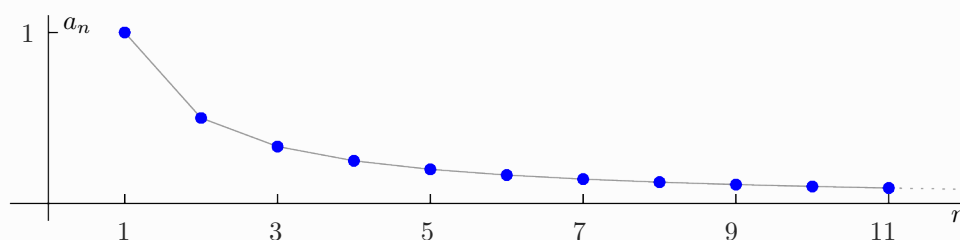
Seguem explícitos os cinco primeiros termos dessa sequência

$$a_1 = \frac{1}{1}, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{1}{4}, \quad a_5 = \frac{1}{5}.$$

Escrevendo na notação de sequências temos

$$(a_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right).$$

A representação gráfica de  $(a_n)$  pode ser observada abaixo.



Neste caso, note que à medida em que avançamos no índice  $n$ , os termos dessa sequência vão ficando cada vez menores. Dessa forma, o gráfico de  $(a_n)$  parece se aproximar cada vez mais do eixo horizontal, isto é, os termos  $a_n$  estão se aproximando do número zero.

É isso que significa dizer que  $a_n$  tende a zero?



Exatamente isso, meu amigo! Podemos também dizer que ela **converge** para zero.

Considere a sequência cujos termos são formados pelo quadrado de seu índice, isto é,

$$a_n = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Seguem explícitos os cinco primeiros termos dessa sequência

$$a_0 = 0^2 = 0,$$

$$a_1 = 1^2 = 1,$$

$$a_2 = 2^2 = 4,$$

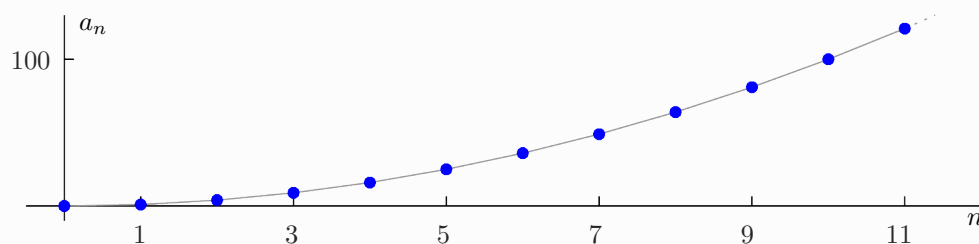
$$a_3 = 3^2 = 9,$$

$$a_4 = 4^2 = 16.$$

Escrevendo na notação de sequências temos

$$(a_n) = (0, 1, 4, 9, 16, \dots).$$

A representação gráfica de  $(a_n)$  pode ser observada abaixo.



Observe que, à medida que avançamos no índice  $n$ , o termo  $a_n$  vai assumindo valores cada vez maiores, assim o gráfico de  $(a_n)$  parece “crescer” indefinidamente.

Saquei! Então essa é um exemplo de sequência que tende ao infinito.



Isso mesmo! Uma outra maneira de dizer isso é dizer que essa sequência **diverge para o infinito**. Daqui a pouco eu explico melhor.



Converge, diverge... isso tá parecendo com as aulas de óptica da disciplina de física, e eu sou péssimo em física. Aff!

Seja a sequência definida por

$$a_n = (-1)^n n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Seguem explícitos os cinco primeiros termos dessa sequência

$$a_0 = (-1)^0 0^2 = 0,$$

$$a_1 = (-1)^1 1^2 = -1,$$

$$a_2 = (-1)^2 2^2 = 4,$$

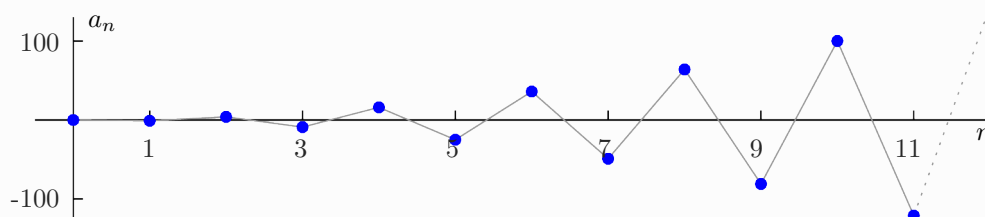
$$a_3 = (-1)^3 3^2 = -9,$$

$$a_4 = (-1)^4 4^2 = 16.$$

Escrevendo na notação de sequências temos

$$(a_n) = (0, -1, 4, -9, 16, \dots).$$

A representação gráfica de  $(a_n)$  pode ser observada abaixo.



Neste exemplo, observe que os termos de  $(a_n)$  vão oscilando entre valores positivos e negativos gradativamente à medida que  $n$  cresce, sem se aproximarem de um valor único.



Essa está indo ao mesmo tempo para mais infinito e para menos infinito.

Então essa também diverge, né?!



Vocês estão ficando bons nisso!

Seja a sequência definida por

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Seguem explícitos os cinco primeiros termos dessa sequência

$$a_1 = \frac{(-1)^1}{1^2} = -1,$$

$$a_2 = \frac{(-1)^2}{2^2} = \frac{1}{4},$$

$$a_3 = \frac{(-1)^3}{3^2} = \frac{-1}{9},$$

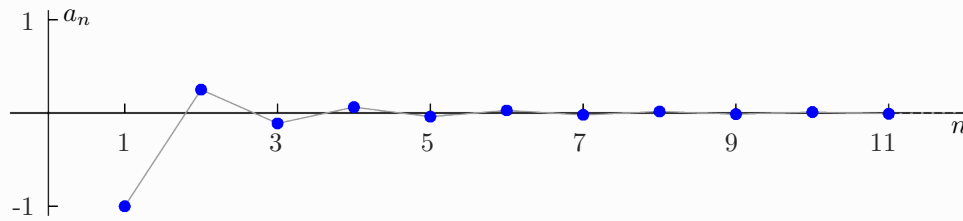
$$a_4 = \frac{(-1)^4}{4^2} = \frac{1}{16},$$

$$a_5 = \frac{(-1)^5}{5^2} = \frac{-1}{25}.$$

Escrevendo na notação de sequências temos

$$(a_n) = \left( -1, \frac{1}{4}, \frac{-1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{-1}{25}, \dots \right).$$

A representação gráfica de  $(a_n)$  pode ser observada abaixo.



Note que, apesar dos termos dessa sequência também oscilarem entre valores positivos e negativo, à medida que  $n$  cresce os valores de  $a_n$  se aproximam de zero.

Interessante! Ela pode oscilar e ainda assim convergir.



Seja a sequência definida por

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right)$$

Seguem explícitos os primeiros termos dessa sequência

$$a_1 = 2,$$

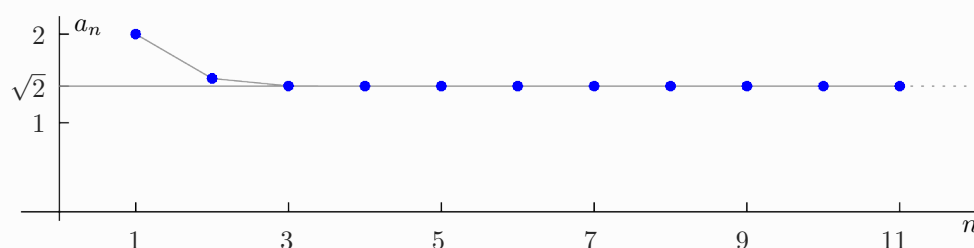
$$a_2 = \frac{1}{2} \left( 2 + \frac{2}{2} \right) = \frac{3}{2} = 1,5,$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} + \frac{2}{3/2} \right) = \frac{17}{12} \approx 1,4166,$$

$$a_4 = \frac{1}{2} \left( \frac{17}{12} + \frac{2}{17/12} \right) = \frac{577}{408} \approx 1,41421,$$

$$a_5 = \frac{1}{2} \left( \frac{577}{408} + \frac{2}{577/408} \right) = \frac{665857}{470832} \approx 1,4142135.$$

A representação gráfica de  $(a_n)$  pode ser observada abaixo.





Depois do terceiro termo, tudo parece igual.

Sim, essa ideia ficará mais clara quando definirmos o **limite**. Basicamente, a partir de um dado ponto, todos os termos são iguais a menos de uma pequena tolerância.

Sobre essa sequência em especial, caso o leitor não tenha percebido, à medida que avançamos no índice  $n$ , ela se aproxima com excelente precisão da representação decimal da  $\sqrt{2}$ . A tabela a seguir apresenta, para os primeiros valores decimais da aproximação da  $\sqrt{2}$  e seus respectivos erros. No final colocamos o valor “exato” com 16 casas decimais calculado computacionalmente.

| $n$        | $a_n$                 | Erro                  |
|------------|-----------------------|-----------------------|
| 1          | 2                     | 0,5857 8643 7626 9049 |
| 2          | 1,5                   | 0,0857 8643 7626 9049 |
| 3          | 1,4166 6666 6666 6665 | 0,0024 5310 4293 5714 |
| 4          | 1,4142 1568 6274 5097 | 0,0000 0212 3901 4145 |
| 5          | 1,4142 1356 2374 6899 | 0,0000 0000 0001 5947 |
| 6          | 1,4142 1356 2373 0949 | 0,0000 0000 0000 0002 |
| 7          | 1,4142 1356 2373 0949 | 0,0000 0000 0000 0002 |
| $\sqrt{2}$ | 1,4142 1356 2373 0951 |                       |

Poxa vida! Como eu vou saber se uma sequência irá se aproximar ou não de algum valor específico?



Para respondermos a essa pergunta, primeiramente precisamos entender o significado da expressão “se aproximar ou não de algum valor específico”. Na verdade, quando os termos de uma sequência se aproximam de um determinado valor, dizemos que a sequência **converge** para este valor. A seguir, apresentamos a definição de convergência de uma sequência.

## DEFINIÇÃO 4.4: CONVERGÊNCIA DE SEQUÊNCIAS

Dizemos que uma sequência  $(a_n)$  converge para um número real  $L$  se, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \varepsilon.$$

nesse caso, dizemos ainda que  $L$  é o **limite** da sequência  $(a_n)$ .



Que loucura é essa? De onde saiu esse monte de letra?

Não se assuste! Vou explicar mais devagar. Uma maneira de compreender essa definição e o significado do símbolo  $\varepsilon$  é visualizá-lo como um valor de tolerância. Suponhamos que estejamos buscando uma aproximação para o valor  $L$ , utilizando a sequência  $a_n$ . Para obtermos uma aproximação precisa, seria necessário garantir que, para qualquer valor de tolerância  $\varepsilon$  desejada, possamos encontrar um índice  $N$  a partir do qual todos os termos da sequência se aproximem de  $L$  com um erro menor do que  $\varepsilon$ . Contudo, nosso objetivo não se limita apenas à aproximação de  $L$ ; desejamos afirmar que o limite da sequência  $a_n$  **é igual** a  $L$ . Nesse caso, é necessário assegurar que, para todos os valores de  $\varepsilon > 0$ , sempre exista um valor de  $N$  que satisfaça a condição de que o erro seja menor do que  $\varepsilon$ . Em outras palavras, independentemente da proximidade que exijamos entre os termos de  $a_n$  e  $L$ , sempre será possível encontrar um índice a partir do qual essa condição seja atendida.



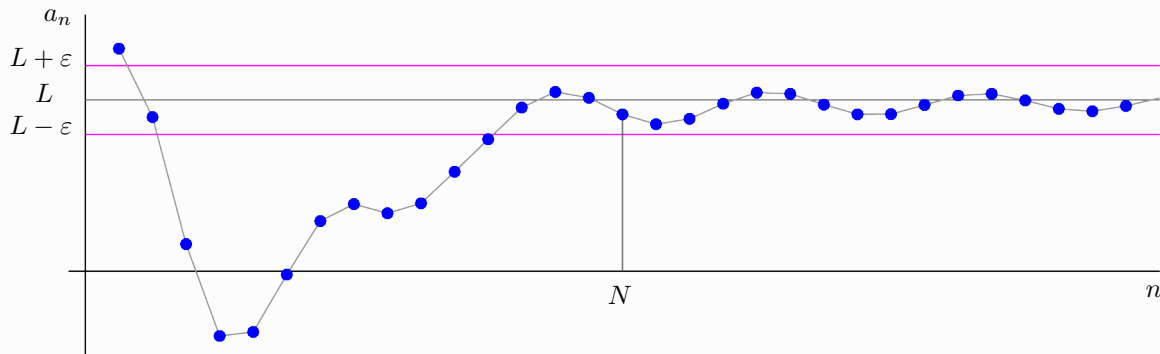
Vou precisar ler e refletir um pouco mais sobre isso ...

Não vou mentir. De fato, essa é uma definição que exige bons períodos de estudos.

Se  $(a_n)$  converge para  $L$ , usamos a seguinte notação

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \rightarrow L.$$

A Figura 4.2 ilustra a definição do limite de uma sequência numérica. Esse gráfico apresenta uma sequência,  $(a_n)$  que converge para  $L$ , para qualquer valor de tolerância  $\varepsilon$  que escolhermos, não importa o quão pequeno, sempre vai existir um índice  $N$  a partir do qual todos os valores  $a_n$  estão sempre dentro do intervalo de tolerância  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ .



**Figura 4.2:** Ilustração da definição do limite de sequências numéricas.

### A definição formal do Limite

**Augustin-Louis Cauchy** foi um matemático francês do século XIX que desempenhou um papel crucial na consolidação e rigorização do cálculo, especialmente na formalização do conceito de limite. Suas contribuições também foram fundamentais para estabelecer os alicerces da análise matemática moderna.

Antes de Cauchy, o conceito de limite era tratado de forma mais intuitiva e informal por matemáticos como Newton e Leibniz. Embora suas descobertas tenham sido revolucionárias, suas explicações careciam de rigor e não eram aceitas por todos os matemáticos da época.

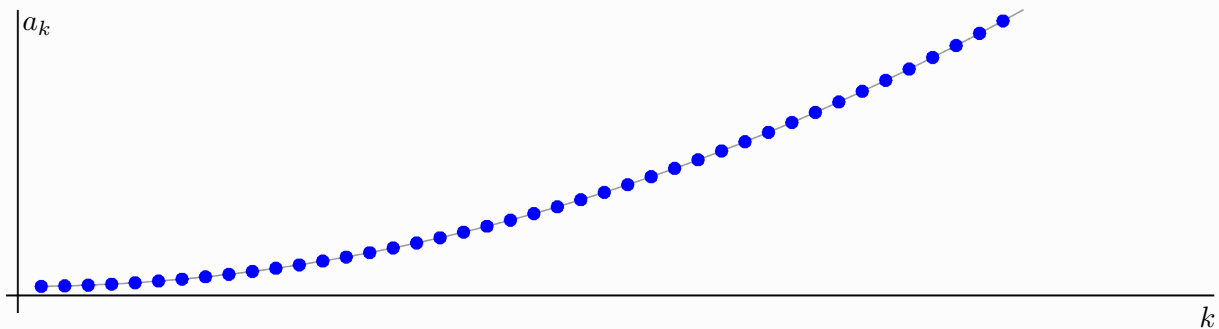
Cauchy percebeu a necessidade de uma base mais sólida para o cálculo e, por isso, se concentrou em desenvolver uma definição rigorosa do conceito de limite. Em 1821, ele publicou o livro *Cours d'Analyse*, no qual apresentou suas contribuições para a matemática, incluindo uma definição precisa e formal de limite.



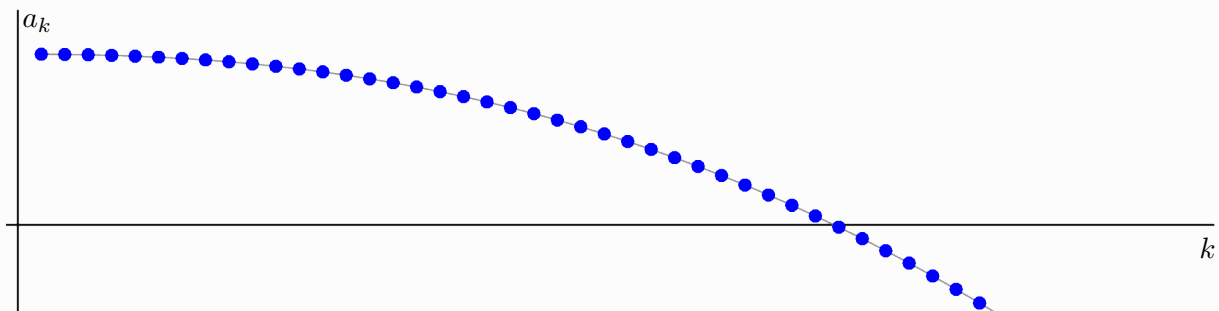
Augustin Cauchy  
1789 – 1857

Cauchy também desenvolveu a teoria das séries e a noção moderna de convergência de sequências. Seus trabalhos tiveram um impacto profundo na matemática e influenciaram gerações subsequentes de matemáticos.

Quando não existe um número real  $L$  que satisfaça a propriedade de aproximação de uma sequência  $(a_n)$ , dizemos que essa sequência é **divergente**. Nas figuras a seguir são ilustradas algumas formas pelas quais uma sequência numérica pode divergir.



**Figura 4.3:** Sequência divergente para o infinito.



**Figura 4.4:** Sequência divergente para menos infinito.

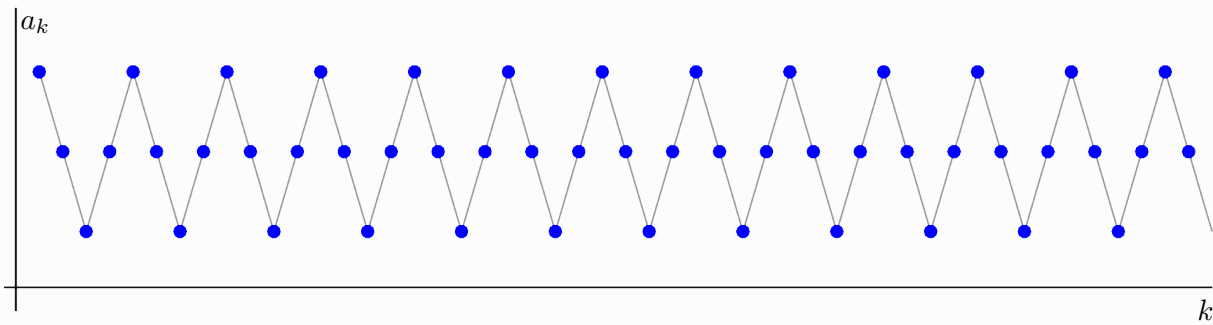
Os gráficos das Figuras 4.3 e 4.4 representam sequências que divergem para o infinito positivo e negativo.

Por que ir para o infinito não é convergir?



Note que, quando uma sequência de termos tende ao infinito, ela não se aproxima de valor algum e, por isso, não podemos dizer que ela converge.

Na Figura 4.5, temos uma sequência que oscila, repetindo os mesmos valores indefinidamente.

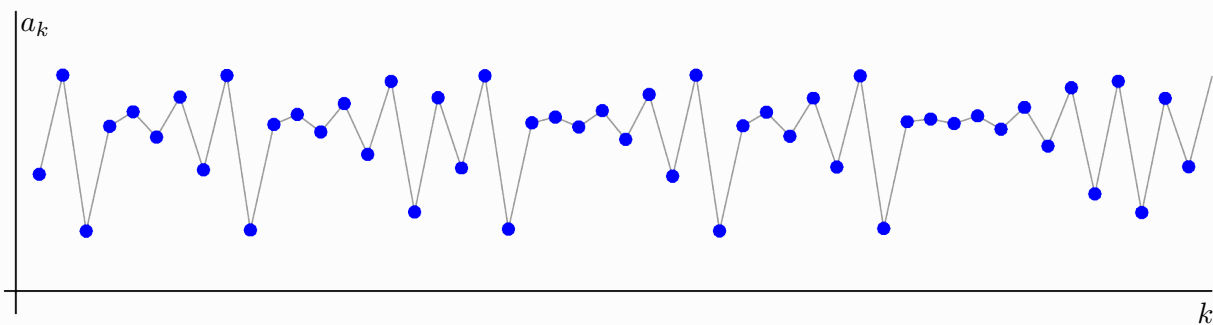


**Figura 4.5:** Sequência divergente pois permanece oscilando entre os mesmos valores.

Por outro lado, a sequência ilustrada em 4.6, conhecida como mapa logístico, apresenta um comportamento caótico. Essa sequência foi produzida pela relação de recorrência

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n).$$

Para valores de  $r$  maiores do que algo em torno de 3,56995, a sequência produzida é caótica. Segue o link para o [mapa logístico](#) na Wikipédia.



**Figura 4.6:** Sequência divergente pois tem comportamento caótico.

Vamos utilizar a Definição 4.4 para demonstrar a convergência de algumas sequências. Observe a sequência definida por

$$a_n = \frac{1}{2n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ao explicitarmos os quatro primeiros termos dessa sequência, encontramos

$$a_1 = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

$$a_4 = \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8}$$

Também podemos usar a notação de sequências para explicitar os valores de  $a_n$

$$(a_n) = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots \right)$$

Como é possível observar, à medida que o índice  $n$  vai aumentando, isto é, tendendo ao infinito, os termos de  $(a_n)$  vão diminuindo. Esse comportamento nos induz a concluir que essa sequência está convergindo para zero. Vamos provar isso.



Ué! Se eu já sei que ela vai para zero, por que preciso me preocupar em provar isso?

Apesar do comportamento da sequência nos sugerir isso, não podemos garantir que isso é verdade para todo  $n$  natural apenas experimentamos alguns valores.

Dessa forma, precisamos demonstrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0,$$

isto é, queremos provar que, para qualquer número real positivo  $\varepsilon$ , não importa o quão pequeno ele seja, sempre podemos encontrar um número  $N \in \mathbb{N}$  tal que a partir desse índice, isto é, para todo  $n > N$ , os termos da sequência  $(a_n)$  estão sempre mais perto do valor do limite do que  $\varepsilon$ .

Assim, dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe um número  $N > 0$ , tal que se  $n$  for inteiro e  $n > N$ , então

$$\left| \frac{1}{2n} - 0 \right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{1}{2n} \right| < \varepsilon.$$

Como  $1/2n > 0$ , podemos escrever

$$\frac{1}{2n} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad 2n > \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n > \frac{1}{2\varepsilon}.$$

Dessa forma, dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $N$  natural maior que  $1/2\varepsilon$  tal que

$$|a^n - 0| < \varepsilon \quad \forall n > N.$$

Esse fato nos garante que a sequência converge para zero.

Vamos agora verificar o comportamento dos termos de outra sequência

$$a_n = \frac{1}{2^n}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Explicitando os cinco primeiros termos dessa sequência, temos

$$a_0 = \frac{1}{2^0} = 1,$$

$$a_1 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2},$$

$$a_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4},$$

$$a_3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8},$$

$$a_4 = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}.$$

Escrevendo na notação de sequências, temos

$$(a_n) = \left( 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \right).$$

Novamente é possível observar que, à medida que  $n$  cresce, os termos dessa sequência vão se aproximando de zero. Então, vamos verificar se zero é o limite  $(a_n)$ , ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Queremos mostrar que, dado  $\varepsilon > 0$ ,

$$n > N \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Como o valor do limite é zero e os termos são sempre positivos, podemos

escrever a desigualdade como

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Rearranjando temos

$$2^n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Precisamos agora encontrar os valores de  $n$  para os quais essa desigualdade seja verdadeira e, para isso, precisamos isolar  $n$ . Como  $n$  aparece elevando o número 2, precisamos da operação inversa da potência que, neste caso, vai ser o logaritmo na base 2, pois

$$\log_2 a = b \quad \Leftrightarrow \quad 2^b = a$$

Como a função logaritmo de base 2 é crescente, podemos avaliar o logaritmo em ambos os lados da desigualdade para isolar o  $n$

$$\begin{aligned} 2^n &> \frac{1}{\varepsilon} \\ \log_2(2^n) &> \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \\ n &> \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Como  $1/\varepsilon$  é positivo, sempre podemos calcular seu logaritmo e, como queremos  $N$  natural, basta escolher um valor qualquer maior do que  $\log_2(1/\varepsilon)$ . Note que não precisamos realizar as contas, pois para provar que o resultado é verdadeiro basta simplesmente garantir que  $N$  existe.

É possível generalizar esse resultado para qualquer sequência que seja construída elevando um número  $\alpha$ , menor do que 1 em módulo, ao índice  $n$ . Apresentamos então o seguinte teorema, cuja demonstração não será exibida, mas ocorre de maneira similar à demonstração do resultado anterior obtido para  $1/2^n$ , em que  $\alpha = 1/2$ .

#### TEOREMA 4.5: CONVERGÊNCIA DA SEQUÊNCIA $\alpha^n$

A sequência de termos  $a_n = \alpha^n$  converge para zero se  $|\alpha| < 1$ , nesse caso

podemos escrever

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0 \quad \text{se} \quad |\alpha| < 1.$$

Se  $|\alpha| > 1$  ou  $\alpha = -1$  a sequência diverge e se  $\alpha = 1$  todos os termos são iguais a 1 e a sequência converge para 1.

A seguir, usaremos novamente a Definição 4.4 para mostrar um tipo de sequência que não converge.

Vamos mostrar que a sequência  $(1, 0, 1, 0, 1, \dots)$  diverge, isto é, que não existe um valor  $L$  para o qual os termos dessa sequência se aproximam. Suponha então, por absurdo, que ela convirja para um dado  $L$ . Tomemos, por exemplo  $\varepsilon = 1/3$ , lembre-se de que  $\varepsilon$  é um valor qualquer dado. Dessa forma, se essa sequência estivesse convergindo para zero, deveríamos ter

$$|0 - L| < \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad L \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

Por outro lado, se ela estivesse convergindo para 1, teríamos

$$|1 - L| < \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad L \in \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

Porém, note que esses intervalos são disjuntos, ou seja, não têm interseção. Assim, é impossível que exista  $L$  que seja limite dessa sequência.

É importante observar que a definição de limite não fornece um método direto para encontrar o valor específico de  $L$ , e sua aplicação pode ser bastante complicada. No entanto, sua relevância está no fato de que podemos utilizá-la como um conceito fundamental para demonstrar as propriedades dos limites, que não mencionaremos neste trabalho. As propriedades, por sua vez, nos permitem efetuar cálculos de forma mais conveniente e precisa. Caso seja de interesse do leitor, recomendamos a leitura de um dos livros *Cálculo, vol.1* de George B. Thomas [13], *Cálculo 1* de James Stewart [12] ou ainda *Um curso de cálculo, vol.1* de Hamilton Luiz Guidorizzi [8].



E como isso será capaz de responder a pergunta que procuramos desde o início,  
 “Quem disse que  $0,999 \dots = 1$ ?”

Calma! Falta-nos apenas mais um passo para respondermos. Na próxima seção, teremos a resposta para a pergunta que inspirou tudo isso.

## 4.3 Séries

Para iniciarmos os estudos sobre as séries numéricas, vamos retornar ao paradoxo de Aquiles visto no Capítulo 1. Suponhamos que seja do nosso interesse calcular a distância que o mitológico guerreiro precisará percorrer para alcançar a tartaruga. Para isso, vamos considerar hipoteticamente que a vantagem dada á tartaruga sobre Aquiles seja inicialmente de 10 metros e que a velocidade de Aquiles seja de 10 m/s enquanto a tartaruga se desloca a 1 m/s. Dessa forma, dada a largada, no intervalo de 1 s aquiles já terá percorrido os 10 m de diferença entre ele a tartaruga, entretanto, nesse mesmo segundo, a tartaruga terá avançado 1 m. Em seguida, Aquiles percorre esse 1 m de diferença, mas a tartaruga já terá se deslocado  $\frac{1}{10}$  m no mesmo intervalo de tempo. Posteriormente, no intervalo em que Aquiles cobre a diferença de  $\frac{1}{10}$  m, a tartaruga avança  $\frac{1}{100}$  m e assim por diante. A distância em metros percorrida por Aquiles poderia ser calculada da seguinte maneira

$$\begin{aligned} D &= 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots \\ &= 11 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots \\ &= 11,111111\dots \end{aligned}$$

que é um número menor que 12, portanto Aquiles percorreria essa distância em menos que 1,2 s.

A expressão utilizada para representar a distância percorrida por Aquiles é um exemplo do que chamamos de **série**. Séries, portanto, são somas com um número infinito de termos. Entretanto, esse tipo de soma não é tão fácil de ser assimilada. Os antigos gregos, por exemplo, lidavam com problemas dessa natureza, mas por

causa da ausência de uma estrutura formalizada para essa ideia, eles chegavam em resultados contraditórios. O paradoxo da Dicotomia, também visto no Capítulo 1, ilustra essa situação. Como sugere Zenão, para que um móvel percorra a distância entre um ponto  $A$  e um ponto  $B$ , ele teria primeiramente que cobrir metade da distância de  $A$  até  $B$ . Depois, metade do que falta, e assim por diante. Como isso envolve um número infinito de etapas, Zenão concluiu que o corredor nunca iria alcançar seu destino. Apesar de Arquimedes apresentar no método de exaustão uma possibilidade para trabalhar com esse conceito, foi somente no século XIX que o processo que envolve a soma de infinitos termos de uma sequência foi estruturado. Vamos iniciar a análise desse processo por meio da definição formal de séries.

#### DEFINIÇÃO 4.6: SÉRIE NUMÉRICA

**Série Numérica** é a soma dos infinitos termos de uma sequência numérica,  $(a_n)$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Cada termo  $a_n$  é chamado de **Termo Geral** da série.



Que símbolo maluco é esse zig-zag aí?

O símbolo  $\Sigma$  é uma letra grega chamada sigma e indica a soma entre o termo de índice  $i$  até o termo de índice  $N$  definidos pela expressão de  $(a_n)$ . A notação

$$\sum_{n=i}^N a_n$$

é utilizada para indicar o **somatório** entre os termos de uma sequência. Observe o exemplo.

Vamos exibir o somatório dos três primeiros termos da sequência definida pela expressão  $2n + 1$ .

$$\sum_{n=1}^3 2n + 1$$

Sendo

$$a_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$a_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

temos

$$\sum_{n=1}^3 2n + 1 = 3 + 5 + 7 = 15$$

Mas isso não é simplesmente uma soma?



Se o somatório contém uma quantidade finita de termos, as propriedades aritméticas da soma valem e ele serve apenas como uma notação abreviada para a soma desses termos. Contudo, no caso de infinitos termos, é necessário mais cautela e cuidado na manipulação dessa operação.

Para determinarmos se o tipo de soma de uma série infinita faz sentido, precisamos construir um critério de convergência e para isso vamos construir outra sequência numérica associada a série. Assim, seja a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

de termos  $a_n$ , sua sequência de **somas parciais** é definida como

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$\vdots$

$$S_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = \sum_{n=1}^k a_n.$$

Podemos agora definir a convergência das séries numéricas usando a Definição 4.4 de convergência das sequências numéricas.

## DEFINIÇÃO 4.7: CONVERGÊNCIA DE UMA SÉRIE

Dada uma série numérica

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

dizemos que ela **converge** para um número real  $L$  quando sua sequência de somas parciais  $(S_n)$  converge para  $L$ , isso é,  $S_n \rightarrow L$ . Nesse caso podemos escrever

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = L$$

e dizemos que  $L$  é a **Soma da Série**.

No caso em que a sequência de somas parciais diverge, dizemos que a série **diverge**.

Para ilustrar os conceitos envolvendo séries infinitas apresentados, vamos explorar a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

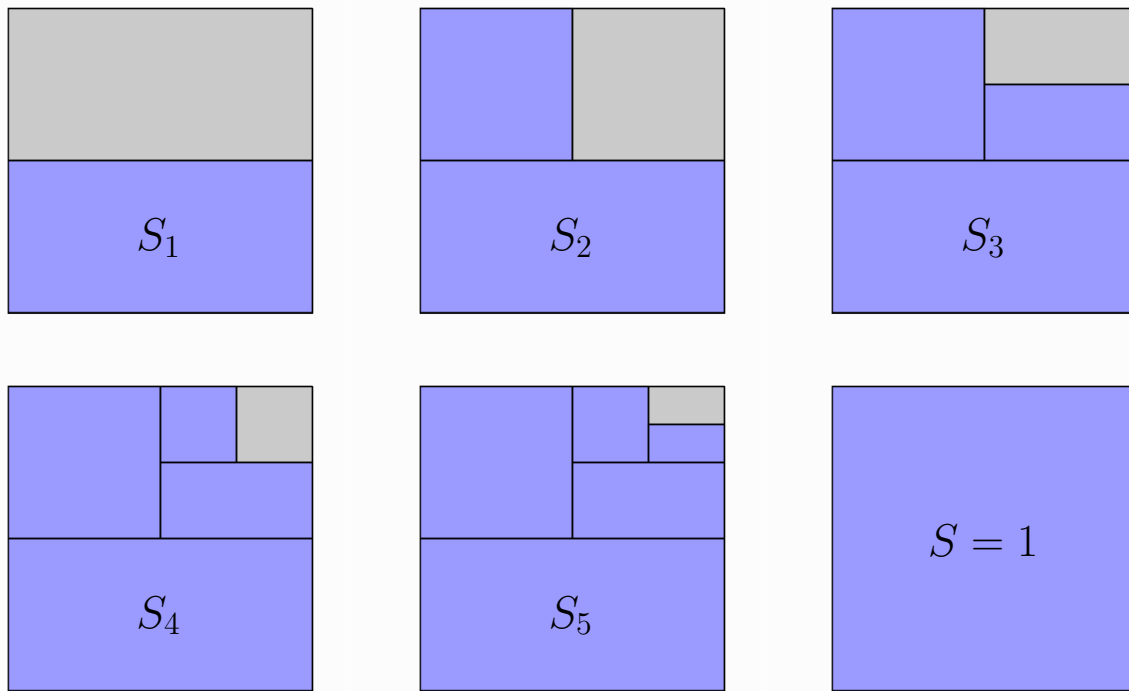
Essa série é interessante, pois podemos interpretá-la geometricamente com facilidade. Note que os primeiros termos da sequência que queremos somar são

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{4}, \quad a_3 = \frac{1}{8}, \quad a_4 = \frac{1}{16}, \quad a_5 = \frac{1}{32}.$$

Podemos imaginar que cada termo é a área de um retângulo e queremos encontrar a área da figura formada pela união de todos esses retângulos. A Figura 4.7 ilustra geometricamente os cinco primeiros termos da sequência de somas parciais dessa série e sua soma.

O próximo exemplo efetua os cálculos para mostrar que a série realmente converge e que sua soma é igual a 1.

Vamos calcular a soma os termos da sequência  $a_n = \frac{1}{2^n}$ , isto é, calcular a soma



**Figura 4.7:** Ilustração das somas parciais da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ .

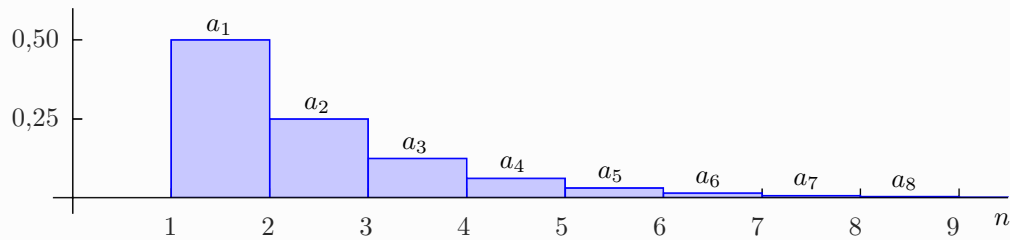
da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

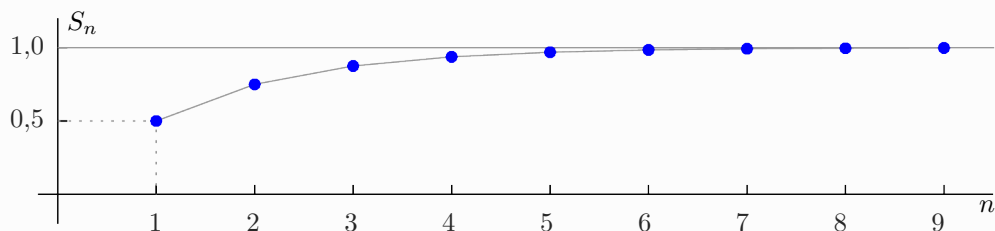
Para analisarmos se a série converge e qual seria o valor da sua soma, vamos construir a sequência de somas parciais:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 &= \frac{1}{2}, \\ S_2 &= a_1 + a_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \\ S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

O gráfico a seguir ilustra a soma dessa série, cada retângulo tem base igual a um e altura igual ao termo correspondente da série  $a_n$ .



O próximo gráfico mostra os primeiros termos da sequência de somas parciais.



Podemos observar nos gráficos que, como esperado, a série converge para 1. Porém, não podemos ficar dependentes da evidência gráfica, que muitas vezes é enganosa. Precisamos verificar rigorosamente esse resultado. Para isso, precisamos identificar a fórmula geral para cada soma parcial. Vamos tentar construir essa fórmula e verificar sua validade. Observando a Figura 4.7, a área  $S_k$  em azul de cada quadrado pode ser expressa por

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2}$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{4}$$

$$S_3 = 1 - \frac{1}{8}$$

$$S_4 = 1 - \frac{1}{16}$$

$$S_5 = 1 - \frac{1}{32}.$$

Essa relação pode ser visualizada graficamente. Note na figura 4.7 que a região que falta para completar o quadrado de lado 1 é sempre igual ao retângulo que colocamos por último.

Observando o padrão, podemos escrever uma conjectura sobre como a fórmula geral deve ser

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Agora precisamos verificar se ela é verdadeira para todos os valores de  $n \in \mathbb{N}$ . Usaremos novamente a técnica de **indução finita** para este caso. Para isso, precisamos primeiro mostrar que a fórmula vale para  $n = 1$ . Depois assumimos que ela vale para um  $n$  qualquer e, partido dessa hipótese, mostrarmos que ela vale para o próximo,  $n + 1$ .

A demonstração que a fórmula vale para  $n = 1$  pode ser feita por mera avaliação. Vamos agora assumir que a fórmula vale para um valor qualquer  $n = k - 1$

$$S_{k-1} = 1 - \frac{1}{2^{k-1}}, \quad (4.1)$$

queremos mostrar que isso implica que ela também vale para o próximo  $n = k$ . Começamos calculando  $S_k$

$$S_k = S_{k-1} + a_k = S_{k-1} + \frac{1}{2^k},$$

substituindo a **hipótese de indução** (4.1) temos

$$\begin{aligned} S_k &= 1 - \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} \\ &= 1 - \frac{2}{2^k} + \frac{1}{2^k} \\ &= 1 - \frac{1}{2^k}, \end{aligned}$$

que é a fórmula que desejamos demonstrar. Portanto, nossa fórmula é válida e cabe-nos agora provar que ela converge para 1. Para isso, e por meio da Definição 4.7, vamos calcular seu limite e determinar a soma da série. Assim temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right)$$

note que o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2^n} \right) = 0$$

conforme já verificamos na seção anterior. Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1.$$

Portanto, a série converge e podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$



Que trabalheira!

Um outra observação interessante desse exemplo é que ele soluciona o paradoxo da Dicotomia proposto por Zenão. Note que, se supormos a distância a ser percorrida pelo móvel entre os pontos  $A$  e  $B$  igual a 1, a soma dos infinitos comprimentos a serem percorridos por esse móvel converge exatamente para seu comprimento total, isto é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1.$$

Um tipo de série muito utilizada em matemática é a **série geométrica**. É provável que em algum momento você já tenha visto algo sobre essa série, mas com outro nome. No ensino médio, temos o costume de chamá-la de **Soma da P.G. Infinita**. Problemas que envolvem a soma de infinitas áreas poligonais ou de infinitas parcelas de um financiamento são alguns dos exemplos que exploram esse conceito nesse nível de ensino.

#### DEFINIÇÃO 4.8: SÉRIE GEOMÉTRICA

Sejam  $\alpha$  e  $q$  números reais com  $\alpha \neq 0$ , uma série com a forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha q^{n-1} = \alpha + \alpha q + \alpha q^2 + \alpha q^3 + \cdots + \alpha q^{n-1} + \cdots$$

é chamada de **Série Geométrica**.

A sequência dos termos dessa série é a progressão geométrica conforme a Definição 4.3 exibida na seção anterior. Esse é um exemplo especialmente importante, pois conseguimos verificar sua convergência e calcular sua soma com relativa facilidade, fato que não acontece com a maioria das séries.

#### TEOREMA 4.9: CONVERGÊNCIA DA SÉRIE GEOMÉTRICA

A série geométrica converge se  $|q| < 1$  e diverge se  $|q| \geq 1$ .

No caso em que a série converge, sua soma é dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha q^{n-1} = \frac{\alpha}{1-q}. \quad (4.2)$$

#### Demonstração

A sequência de somas parciais da série geométrica é

$$S_n = \sum_{k=1}^n \alpha q^{k-1}.$$

Vamos considerar primeiro o caso  $q = 1$ , onde temos

$$S_n = \sum_{k=1}^n \alpha = n\alpha.$$

e a série diverge, pois se  $\alpha > 0$ ,  $S_n$  vai para mais infinito quando  $n$  cresce e, se  $\alpha < 0$ ,  $S_n$  vai para menos infinito quando  $n$  cresce.

Considerando agora  $q \neq 1$ , vamos subtrair  $qS_n$  de  $S_n$  para obter

$$S_n(1-q) = S_n - qS_n$$

$$S_n(1-q) = (\alpha + \alpha q + \cdots + \alpha q^{n-1}) - (\alpha q + \cdots + \alpha q^{n-1} + \alpha q^n)$$

$$S_n(1-q) = \alpha - \alpha q^n.$$

Pelo fato de que  $q \neq 1$ , podemos dividir ambos os membros dessa equação por

$(1 - q)$  afim de isolarmos a soma parcial  $S_n$ .

$$S_n = \frac{\alpha(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Como  $|q| < 1$  o Teorema 4.5 nos garante que  $q^n \rightarrow 0$  se  $|q| < 1$  e  $|q^n| \rightarrow \infty$  se  $|q| \geq 1$ , segue que

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\alpha}{1 - q}$$

se  $|q| < 1$  e  $S_n$  diverge se  $|q| \geq 1$ .

Para exemplificar, vamos avaliar a convergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^n}$ .

Essa série pode ser reescrita na forma  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha q^{n-1}$  da seguinte maneira

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}.$$

Então, é uma série geométrica com  $\alpha = 4/5$  e  $q = 2/5$ . Como  $|q| = 2/5 < 1$ , segue do critério de convergência da série geométrica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^n} = \frac{4/5}{1 - 2/5} = \frac{4/5}{3/5} = \frac{4}{3}.$$

Outra aplicação importante das séries geométricas está nas dízimas periódicas. Vamos analisar de forma genérica as dízimas periódicas da forma  $0,\bar{d} = 0,dddd\dots$ , em que  $d$  é um dígito entre 1 e 9, isto é, diferente de zero. Podemos escrever o valor dessa dízima como uma série infinita da seguinte maneira,

$$0,ddd\,ddd\dots = \frac{d}{10} + \frac{d}{(10)^2} + \frac{d}{(10)^3} + \dots$$

colocando  $\frac{d}{10}$  em evidência, temos

$$\frac{d}{10} \left( 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{(10)^2} + \dots \right)$$

contudo, note que a expressão entre parêntesis é igual a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

e que, portanto, é uma série geométrica de razão  $q = 1/10$ . Utilizando o Teorema 4.9 temos

$$\begin{aligned} 0,ddd\ ddd\dots &= \frac{d}{10} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \\ &= \frac{d}{10} \left(\frac{1}{1 - 1/10}\right) \\ &= \frac{d}{10} \left(\frac{1}{0,9}\right) \\ &= \frac{d}{9}. \end{aligned}$$

Com esse último resultado, finalmente, estamos prontos para responder ao questionamento que inspirou toda a construção desse trabalho

“Quem disse que  $0,999\dots = 1$ ?”



Aleluia!!!

Ao substituirmos  $d$  por 9 no resultado acima, temos

$$0,999\ 999\dots = \frac{9}{9} = 1.$$

Assim, o **Limite** é a resposta que todos nós tanto procuramos.



Ué! Mas é só isso?

Pareceu fácil, não é mesmo?



Sinceramente, eu esperava algo mais difícil...

Eu achei fantástico!



Vejam bem, apesar de parecer um resultado simplório, a matemática que utilizamos para pavimentar todo o caminho que nos trouxe até aqui é rica em detalhes. Lembrem-se de que, quando iniciamos nossa jornada, muitas dúvidas e confusões habitavam nossos pensamentos. Nossas percepções sobre o infinito eram sustentadas por nossas experiências e intuições, mas, aos poucos, fomos nos desapegando de nossas concepções equivocadas e emoções e construindo de maneira lógica cada resultado, sendo vários deles agradavelmente surpreendentes.

Isso é verdade. Eu mesmo fui vítima das armadilhas criadas pelo infinito.



Pois é! Esse processo de desapego de nossas intuições e crenças pessoais, à medida que mergulhamos nas complexidades da matemática, é um aspecto fundamental do desenvolvimento do raciocínio matemático. A matemática nos desafia a questionar, a raciocinar de forma crítica e a buscar uma verdade objetiva, independentemente de nossas inclinações iniciais.



Às vezes eu acho isso meio exagerado...

Pode até parecer exagero, mas a jornada de descoberta matemática nos leva a uma apreciação mais profunda da importância da lógica e do rigor na resolução de problemas. Afinal, é essa capacidade de construir argumentos sólidos e de chegar a conclusões precisas que nos permitem não apenas entender o mundo que nos rodeia, mas também contribuir para o avanço do conhecimento e da sociedade.



É, você tem razão.

Pois bem, mas espero que vocês tenham entendido que a compreensão de que  $0,999\dots$  não se aproxima de 1, mas é de fato igual a 1, se afirma como algo que vai muito além da simples substituição do dígito “d” pelo dígito 9 na última fórmula que criamos. Antes desse processo, foi necessário demonstrar a veracidade da fórmula que nos permitiu expressá-lo e estabelecer sua aplicabilidade generalizada.

Mas antes disso ainda tivemos que definir o conceito de séries infinitas e investigar suas possíveis convergências.



Sim, foram necessários estudos sobre sequências e limites, que, por sua vez, demandaram explicações prévias sobre a construção dos números reais e o entendimento de conjuntos finitos e infinitos.

Mas tudo isso só se tornou viável quando conseguimos estabelecer bijeções entre conjuntos, um conceito que, por sua vez, exigiu a compreensão de funções e algumas de suas peculiaridades.



Caramba! Realmente não foi um caminho tão simples! Já estou até me sentindo um nerde...

Aaaaaa... Não exagera!



# Considerações Finais

É com imensa satisfação que chegamos ao final desta emocionante jornada pelo intrigante e enigmático universo do infinito. Neste trabalho, buscamos proporcionar a você uma experiência enriquecedora e instigante, conduzindo-o através dos mistérios e maravilhas que residem além dos limites conhecidos.

A matemática é uma ciência que nos possibilita desvendar segredos ocultos nas estruturas mais complexas da natureza e do universo. Ao explorarmos o infinito, mergulhamos em um reino de possibilidades ilimitadas, onde as ideias e conceitos se estendem além de nossa compreensão imediata, desafiando nossa mente e inspirando nossa curiosidade.

Durante esta jornada, adentramos nas propriedades do infinito, entendendo que ele não é um número, mas sim um conceito abstrato que ultrapassa todas as fronteiras finitas que normalmente encontramos em nosso dia a dia. Descobrimos que o infinito se manifesta na imensidão dos conjuntos, nas funções matemáticas, nas geometrias e nas séries numéricas.

Aprender sobre o infinito é não apenas uma oportunidade de expandir nossos conhecimentos matemáticos, mas também um convite para o desenvolvimento de habilidades críticas, como o pensamento lógico, a resolução de problemas e o pensamento abstrato. Além disso, o estudo do infinito nos ensina a humildade diante da vastidão do conhecimento humano, mostrando-nos que, mesmo com todos os avanços científicos e tecnológicos, há sempre mais a descobrir e explorar.

Enfrentamos desafios ao longo do caminho, mas, com paciência, dedicação e trabalho em equipe, juntos superamos cada obstáculo e alcançamos novas compreensões. Cada conceito aprendido, cada teorema compreendido e cada problema resolvido são conquistas que nos tornam mais fortes e preparados para os desafios futuros.

Espero que esta apostila tenha aguçado sua curiosidade e instigado o desejo de continuar sua jornada no mundo da matemática e, quem sabe, em outras áreas do conhecimento. A matemática é uma disciplina fascinante e poderosa, capaz de nos fornecer as ferramentas necessárias para decifrar os enigmas do universo e moldar um futuro mais promissor para a humanidade.

Nossos agradecimentos a todos os educadores e professores que dedicam suas vidas a transmitir o conhecimento e despertar a paixão pelo aprendizado. O futuro está em suas mãos, e o conhecimento é o melhor investimento que podemos fazer para transformar o mundo em um lugar melhor.

Por fim, desejamos que este material tenha sido uma experiência gratificante e enriquecedora em sua jornada acadêmica. Que sua sede pelo conhecimento seja infinita, que seus anseios e motivações sejam convergentes e que seus caminhos e possibilidades sejam ilimitados!

Com enorme gratidão, um forte abraço do autor.

# Referências

- 1 ARISTÓTELES. *Física - Livro III - O Tratado do Infinito*. 1999. Disponível em: <<http://www.logoslibrary.org/aristotle/physics/36.html>>. Acesso em: 25 jul. 2023.
- 2 ÁVILA, G. *Introdução à análise matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1999. P. 254. ISBN 9788521201687.
- 3 BROLEZZI, A. C. Raízes do Cálculo na Grécia Antiga. *Revista da Pesquisa e Pós-Graduação*, v. 1, n. 1, p. 38–41, 1999. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/~brolezzi/publicacoes/grecia.pdf>>.
- 4 D'AFONSECA, L. A. *Cálculo IV*. 2023. Disponível em: <<https://sites.google.com/view/prof-luis-dafonseca/calculo-iv>>. Acesso em: 27 jun. 2023.
- 5 DELFINO, H. S. *O conceito de infinito: uma abordagem para a Educação Básica*. 14 dez. 2015. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal de Viçosa (UFV). Disponível em: <[https://sca.profmatsbm.org.br/profmat\\_tcc.php?id1=3027&id2=80458](https://sca.profmatsbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=3027&id2=80458)>.
- 6 DEVLIN, K. *O gene da matemática*. 1. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004. P. 350. ISBN 8501064491.
- 7 FERMAT VIEIRA, P. S. DE. *Elaboração de uma apostila para apresentar o Infinito no Ensino Médio*. 30 ago. 2023. Diss. (Mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEEFT-MG).
- 8 GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo, vol.1*. 5. ed.: Rio de Janeiro, 2013. P. 380. ISBN 9788521622444.
- 9 KISTEMANN JR., M. A. Sobre a teoria das proporções, o método da exaustão e os incomensuráveis. *Revista da educação Matemática*, v. 11, n. 13, p. 48–62, 2008.
- 10 LIMA, E. L. *Curso de análise- Volume 1*. 11. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2004. P. 431. ISBN 8524401184.
- 11 LOURDES MONTEIRO, G. DE; MONDINI, F. Paradoxos falsídicos: os primeiros enfrentamentos do conceito de infinito no contexto da ciência matemática. *Actio: Docência em Ciência*, v. 4, n. 2, p. 30–47, 2019. Disponível em: <<https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/download/9400/6354>>.
- 12 STEWART, J. *Cálculo 1*. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006. P. 697. ISBN 8522104794.
- 13 THOMAS, G. B. *Cálculo, vol.1*. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. P. 629. ISBN 9788581430867.

# Índice Remissivo

- , 33
- =, 28
- $\mathbb{C}$ , 24
- $\mathbb{I}$ , 24
- $\mathbb{N}$ , 24
- $\mathbb{Q}$ , 24
- $\mathbb{R}$ , 24
- $\mathbb{Z}$ , 24
- $\cap$ , 32
- $\cup$ , 30
- $\not\subset$ , 29
- $\notin$ , 23
- $\subset$ , 28
- $\emptyset$ , 26
- $\{\}$ , 26
- $^c$ , 34
- Bijetora, 42
- Biunívoca, 42
- Cardinalidade, 17, 44
- Complementar, 34
- Complexos, 24
- Conjunto
  - denso, 63, 75
  - finito, 45
  - igualdade, 28
  - infinito, 51
  - vazio, 26, 30
- Contradomínio, 38
- Contínuo, 9
- Corolário, 64
- Diagrama de Venn, 27
- Diferença, 33
- Discreto, 9
- Divergência, 86
- Domínio, 38
- Expressão direta, 78
- Fibonacci, 79
- Função, 38
  - bijetora, 42
  - injetora, 40
  - inversa, 42
  - sobrejetora, 41
- Hipótese de indução, 104
- Imagem, 38
- Inclusão, 30
- Indução finita, 104
- Infinitesimal, 6
- Infinito, 9
  - atual, 10
  - potencial, 10
- Infinitésimo, 64
- Infinitésimos, 9
- Injetora, 40
- Inteiros, 24
- Interseção, 32
- Intervalos reais, 70
- Irracionais, 24, 68
- Limite
  - sequência, 90
- limite, 89
- MDC, 60
- Máximo Divisor Comum, 60
- Naturais, 24
- Números
  - Complexos, 24
  - inteiros, 24
  - irracionais, 24
  - naturais, 24
  - racionais, 24
  - reais, 24, 69
- Paradoxo
  - Aquiles, 7
  - Dicotomia, 6
  - Estádio, 8
  - Flecha, 7
- Pertinência, 23
- Progressão
  - aritmética, 79
  - geométrica, 79, 106
- Racionais, 24
- Razão, 80, 81
- Reais, 24, 69
- Relação de recorrência, 79
- Reta
  - numerada, 27
  - real, 70
- Sequência, 29
  - convergente, 89
  - divergente, 92
  - Fibonacci, 79
  - limite, 90
  - numérica, 77
  - recursiva, 79
  - somas parciais, 100
  - termo, 77
  - índice, 77
- Sequência de Fibonacci, 11
- Sobrejetora, 41
- Soma da série, 101

Somas parciais, [100](#)  
Somatório, [99](#)  
Subconjunto, [28](#)  
    próprio, [29](#)  
Série, [98](#)

convergência, [101](#)  
geométrica, [105](#)  
numérica, [99](#)  
termo geral, [99](#)

União, [30](#)  
Venn, [27](#)  
Épsilon, [65](#)

# Quem disse que $0,999\ldots = 1$ ?

Pierre Simon de Fermat Vieira

Luis Alberto D'Afonseca

Sandra Mara Alves Jorge

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET-MG

30 de agosto de 2023

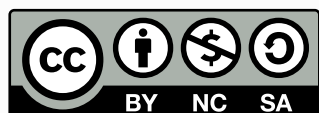
Esta apostila é produto do mestrado de Pierre Simon de Fermat Vieira defendida em 2023 no Profmat do Cefet-MG [7].



A versão mais recente desta apostila pode ser baixada clicando ou escaneando o código QR.

Arte da capa: [Fotografia de Pixabay](#) baixada de [Pexels](#)

Ilustrações baseadas em designs de [macrovector\\_oficial](#) – [Freepik](#)



Essa obra tem a licença [Creative Commons “Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 4.0 Internacional”](#).