Teorema do Valor Médio para Integrais

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

17 de agosto de 2025

Conteúdo

Derivadas e Integrais

Derivada Taxa de variação de f

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Integral indefinida Antiderivada de f

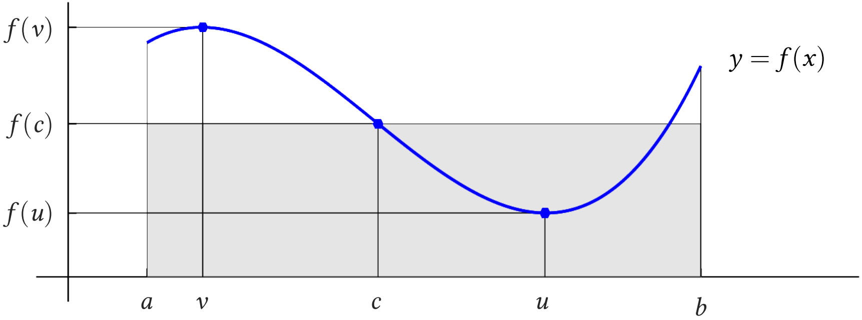
$$F(x) = \int f(x)\,dx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dF}{dx} = f(x)$$

Integral definida Diferença de áreas sob o gráfico de f

$$\text{“Área”} = \int_a^b f(x)\,dx$$

Conteúdo

Valor Médio



Valor Médio

Denotamos o Valor Médio de f em $[a, b]$ por $f_{\text{médio}} \in \mathbb{R}$

$f_{\text{médio}}$ é valor tal que

$$f_{\text{médio}}(b - a) = \int_a^b f(x)dx$$

O Teorema do Valor Médio garante que

$f_{\text{médio}}$ sempre é o valor de f para algum ponto em $[a, b]$

Teorema do Valor Médio para Integrais

Seja f uma função contínua em $[a, b]$, então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(c)(b-a) \;=\; \int_a^b f(x)\,dx$$

ou

$$f(c) \;=\; \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Conteúdo

Demonstração

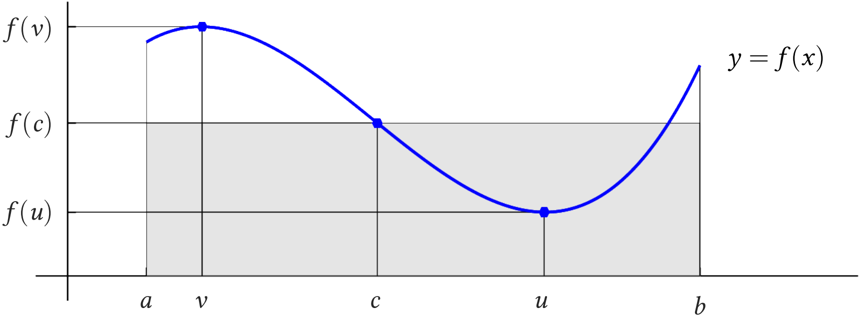
Queremos mostrar que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

Demonstração

Teorema de Weierstrass

f é contínua em $[a, b]$ então existe um mínimo $f(u)$ e um máximo $f(v)$



Demonstração

Como a integral preserva a desigualdade

$$\int_a^b f(u)\,dx \;\leq\; \int_a^b f(x)\,dx \;\leq\; \int_a^b f(v)\,dx$$

$$f(u)(b-a) \;\leq\; \int_a^b f(x)\,dx \;\leq\; f(v)(b-a)$$

$$f(u) \;\leq\; \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \;\leq\; f(v)$$

Demonstração

Valor médio

$$f_{\text{médio}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$f(u) \;\leq\; f_{\text{médio}} \;\leq\; f(v)$$

Teorema do Valor Intermediário

f precisa assumir o valor $f_{\text{médio}}$ em algum $c \in [a, b]$

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar a Seção 2.5 da Apostila

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações