Integrais Impróprias

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

17 de agosto de 2025

Integrais Impróprias

Integrais Impróprias – Tipo 1

Integrais Impróprias – Tipo 2

Exemplos

Integrais Impróprias

- 1. Intervalo de integração infinito
- 2. Descontinuidade no extremo do intervalo

Integrais Impróprias

- 1. Envolve o calculo de um limite
- 2. Se o limite existe a integral é convergente
- 3. Se algum limite não existir a integral é divergente

Integrais Impróprias

Integrais Impróprias – Tipo 1

Integrais Impróprias – Tipo 2

Exemplos

f função contínua em intervalo ilimitado, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, \infty)$

f é função contínua em $[a,\infty)$

$$\int_{a}^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \to \infty} \int_{a}^{t} f(x) dx$$

f é função contínua em $(-\infty,b]$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x) dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{b} f(x) dx$$

f é função contínua em $(-\infty, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{r \to -\infty} \int_{r}^{c} f(x) dx + \lim_{s \to \infty} \int_{c}^{s} f(x) dx$$

para algum $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$

Integrais Impróprias

Integrais Impróprias – Tipo 1

Integrais Impróprias – Tipo 2

Exemplos

f função contínua no interior do intervalo, mas tende ao infinito em algum ponto

f é contínua em [a, b) e descontínua em b,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x) dx$$

Atenção ao limite lateral

f é contínua em (a, b] e descontínua em a,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x) dx$$

Atenção ao limite lateral

f é uma função definida em [a, b], contínua exceto em um ponto $c \in (a, b)$

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \int_{a}^{c} f(x) dx + \int_{c}^{b} f(x) dx$$
$$= \lim_{r \to c^{-}} \int_{a}^{r} f(x) dx + \lim_{s \to c^{+}} \int_{s}^{b} f(x) dx$$

Integrais Impróprias

Integrais Impróprias – Tipo 1

Integrais Impróprias – Tipo 2

Exemplos

Calcular a integral
$$\int_{-\infty}^{0} e^{x} dx$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{x} dx = \lim_{t \to -\infty} \left(\int_{t}^{0} e^{x} dx \right)$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \left(e^{x} \Big|_{t}^{0} \right)$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \left(e^{0} - e^{t} \right)$$

$$= \lim_{t \to -\infty} 1 - \lim_{t \to -\infty} e^{t}$$

$$= 1$$

definição integral imprópria

Determine se a integral

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^{2/3}} \ dx$$

é convergente ou divergente

$$f(x) = \frac{1}{x^{2/3}} = x^{-2/3}$$
 é descontínua em $x = 0$

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^{2/3}} \ dx = \lim_{t \to 0^{-}} \int_{-1}^{t} x^{-2/3} \ dx$$

$$= \lim_{t \to 0^{-}} \left(\frac{x^{-2/3+1}}{-2/3+1} \Big|_{-1}^{t} \right)$$

$$=\lim_{t\to 0^-}\left(3x^{1/3}\bigg|_{-1}^t\right)$$

$$= \lim_{t \to 0^{-}} 3 \left[t^{1/3} - (-1)^{1/3} \right]$$

$$=3$$

19/24

Calcule

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1} \, dx$$

se possível

A função
$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$
 é descontínua em $x = 1 \in [0,3]$

Precisamos dividir o intervalo e duas partes [0,1] e [1,3]

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x-1} dx + \int_1^3 \frac{1}{x-1} dx$$

Agora a descontinuidade está nos extremos dos intervalos e podemos usar integrais impróprias

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x - 1} dx = \lim_{t \to 1^{-}} \int_{0}^{t} \frac{1}{x - 1} dx$$

$$= \lim_{t \to 1^{-}} \ln|x - 1| \Big|_{0}^{t}$$

$$= \lim_{t \to 1^{-}} \left(\ln|t - 1| - \ln|-1| \right)$$

$$= \lim_{t \to 1^{-}} \ln(1 - t) \qquad 1 - t \to 0^{+} \text{ quando } t \to 1^{-}$$

$$= -\infty$$

Portanto a integral diverve e não precisamos calcular a segunda parte

Integrais Impróprias

Integrais Impróprias – Tipo 1

Integrais Impróprias – Tipo 2

Exemplos

Lista Mínima

Estudar a Seção 2.6 da Apostila

Fazer os exercícios 1, 2 e 3

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações