# Integração por Partes

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

17 de agosto de 2025

# Conteúdo

# Justificativa

Assumindo que

$$F'(x) = f(x) \qquad\qquad G'(x) = g(x)$$

temos

$$\big(F(x)G(x)\big)' = f(x)G(x) + F(x)g(x)$$

$$F(x)g(x) = \big(F(x)G(x)\big)' - f(x)G(x)$$

$$\int F(x)g(x)\,dx = \int \big(F(x)G(x)\big)'\,dx - \int f(x)G(x)\,dx$$

$$\int F(x)\,g(x)dx = F(x)\,G(x) - \int G(x)\,f(x)dx$$

# Escolhendo as Funções

$$\int F(x)\, g(x)\, dx \;=\; F(x)\, G(x) \;-\; \int G(x)\, f(x)\, dx$$

Integramos $g(x)$ – essa função não deve "complicar" ao ser integrada

Derivamos $F(x)$ – essa função deve "simplificar" ao ser derivada

# Integração por Partes

Mnemônico

$$\int u\,dv \;=\; u\,v \;-\; \int v\,du$$

usamos $u = F(x)$ e $dv = g(x)dx$

Integrais definidas

$$\int_a^b u\,dv \;=\; u\,v\Big|_a^b \;-\; \int_a^b v\,du$$

# Conteúdo

# Exemplo 1

Calcule a integral $\displaystyle\int x \operatorname{sen}(x)\, dx$

Usando $\displaystyle\int udv = uv - \int vdu$, escolhemos

$$u = x \qquad\qquad dv = \operatorname{sen}(x) dx$$

$$du = dx \qquad\qquad v = \int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x)$$

Temos

$$\int x \operatorname{sen}(x) dx = x\big(-\cos(x)\big) - \int \big(-\cos(x)\big) dx$$

# Exemplo 1

$$\begin{aligned}
\int x \operatorname{sen}(x)\,dx &= uv - \int v du \\
&= x\big(-\cos(x)\big) - \int \big(-\cos(x)\big)\,dx \\
&= -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx \\
&= -x\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + C
\end{aligned}$$

# Conteúdo

# Exemplo 2

Calcule a integral $\displaystyle\int \ln(x)dx = \int \ln(x)\cdot 1dx$

Usando $\displaystyle\int udv = uv - \int vdu$, escolhemos

$$u = \ln(x) \qquad\qquad dv = 1dx$$

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad\qquad v = \int dx = x$$

Temos

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int x\,\frac{1}{x}\,dx$$

# Exemplo 2

$$\begin{aligned}
\int \ln(x)dx &= uv - \int vdu \\
&= x\ln(x) - \int x\,\frac{1}{x}\,dx \\
&= x\ln(x) - \int dx \\
&= x\ln(x) - x + C
\end{aligned}$$

# Conteúdo

# Exemplo 3

Calcule a integral $\int t^2 e^t dt$

Usando $\int udv = uv - \int vdu$, escolhemos

$$u = t^2 \qquad\qquad dv = e^t dt$$

$$du = 2tdt \qquad\qquad v = \int e^t dt = e^t$$

Temos

$$\int t^2 e^t \, dt = t^2 e^t - 2 \int te^t \, dt$$

# Exemplo 3

Temos que integrar $\displaystyle\int te^t\, dt$

Usando $\displaystyle\int udv = uv - \int vdu$, escolhemos

$$u = t \qquad\qquad dv = e^t dt$$

$$du = dt \qquad\qquad v = \int e^t dt = e^t$$

Temos

$$\int te^t dt = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C$$

# Exemplo 3

Substituindo na expressão anterior

$$
\begin{aligned}
\int t^2 e^t \, dt &= t^2 e^t - 2 \int t e^t \, dt \\
&= t^2 e^t - 2 \left( t e^t - e^t + C \right) \\
&= t^2 e^t - 2 t e^t + 2 e^t - 2C \\
&= \left( t^2 - 2t + 2 \right) e^t + C_1
\end{aligned}
$$

# Conteúdo

# Exemplo 4

Calcule a integral $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx$

Usando $\displaystyle\int u\,dv = uv - \int v\,du$, escolhemos

$$u = e^x \qquad\qquad dv = \operatorname{sen}(x)\,dx$$

$$du = e^x\,dx \qquad\qquad v = \int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x)$$

Temos

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx = -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x)\,dx$$

# Exemplo 4 – Andando em Círculos

Calcule a integral $\displaystyle\int e^x \cos(x)\,dx$

Usando $\displaystyle\int u\,dv = uv - \int v\,du$, escolhemos

$$u = e^x \qquad\qquad dv = \cos(x)\,dx$$

$$du = e^x\,dx \qquad\qquad v = \int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x)$$

Temos

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \operatorname{sen}(x) - \int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx$$

# Exemplo 4

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx = -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x)\,dx \tag{1}$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \quad e^x \operatorname{sen}(x) - \int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1)

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx = -e^x \cos(x) + e^x \operatorname{sen}(x) - \int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx$$

# Exemplo 4

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)dx = -e^x \cos(x) + e^x \operatorname{sen}(x) - \int e^x \operatorname{sen}(x)dx$$

$$2\int e^x \operatorname{sen}(x)dx = -e^x \cos(x) + e^x \operatorname{sen}(x)$$

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)dx = \frac{e^x}{2}\big(\operatorname{sen}(x) - \cos(x)\big) + C$$

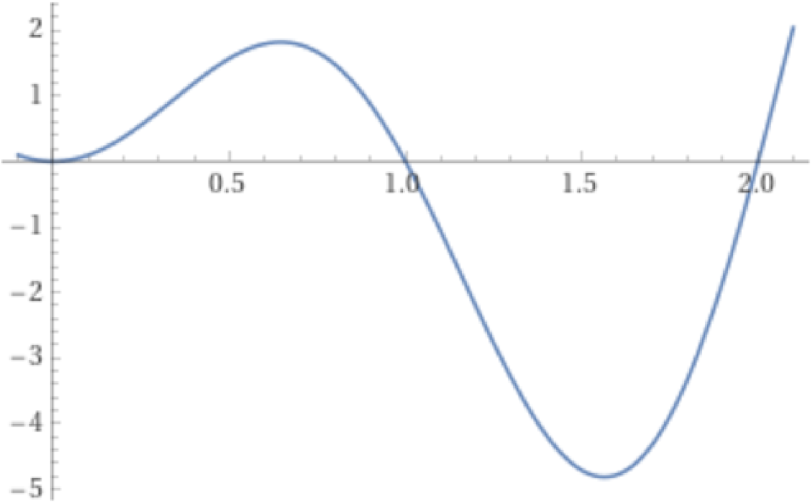
# Conteúdo

# Exemplo 5

Considere a região do primeiro quadrante delimitada pelo eixo $y = 0$ e pela curva $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x)$, $0 \leq x \leq \pi$.

1. Encontre a área dessa região
2. Encontre o volume do sólido de revolução gerado pela rotação dessa região em torno do eixo $y$

# Exemplo 5



# Exemplo 5 – Cálculo da Área

Área

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \int_0^\pi x\operatorname{sen}(x)\,dx$$

Precisamos da primitiva

$$\int x\operatorname{sen}(x)dx = -x\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + C$$

# Exemplo 5 – Cálculo da Área

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo - parte 2

$$
\begin{aligned}
A &= \big( -x\cos(x) + \operatorname{sen}(x) \big)\Big|_0^{\pi} \\
&= \big( -\pi\cos(\pi) + \operatorname{sen}(\pi) \big) - \big( -0\cos(0) + \operatorname{sen}(0) \big) \\
&= \big( -\pi(-1) + 0 \big) - \big( -0 + 0 \big) \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

# Exemplo 5 – Volume rotação no eixo $y$

Método de cascas cilíndricas com

Raio $r(x) = x$

Altura $h(x) = f(x)$

Região de $x = 0$ até $x = \pi$

# Exemplo 5 – Volume rotação no eixo $y$

$$
\begin{aligned}
V &= \int_a^b 2\pi r(x)h(x)\,dx \\
&= \int_0^{\pi} 2\pi x\big(x\,\mathrm{sen}(x)\big)\,dx \\
&= 2\pi \int_0^{\pi} x^2\,\mathrm{sen}(x)\,dx
\end{aligned}
$$

# Exemplo 5 – Volume rotação no eixo $y$

Calcular $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{sen}(x)\,dxs$

Usando $\displaystyle\int udv = uv - \int vdu$, escolhemos

$$u = x^2 \qquad\qquad dv = \mathrm{sen}(x)dx$$

$$du = 2xdx \qquad\qquad v = \int \mathrm{sen}(x)dx = -\cos(x)$$

Temos

$$\int x^2\,\mathrm{sen}(x)\,dx = -x^2\cos(x) + 2\int x\cos(x)\,dx$$

# Exemplo 5 – Volume rotação no eixo $y$

Calcular $\displaystyle\int x\cos(x)\,dxs$

Usando $\displaystyle\int udv = uv - \int vdu$, escolhemos

$$u = x \qquad\qquad dv = \cos(x)dx$$

$$du = dx \qquad\qquad v = \int \cos(x)dx = \operatorname{sen}(x)$$

Temos

$$\int x\cos(x)\,dx = x\operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x)\,dx = x\operatorname{sen}(x) + \cos(x) + C$$

# Exemplo 5 – Volume rotação no eixo $y$

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x)\, dx = -x^2 \cos(x) + 2 \int x \cos(x)\, dx$$

$$\int x \cos(x)\, dx = x \operatorname{sen}(x) + \cos(x) + C$$

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x)\, dx = -x^2 \cos(x) + 2x \operatorname{sen}(x) + 2 \cos(x) + C$$

# Exemplo 5

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo - parte 2

$$V = 2\pi \int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen}(x)\, dx$$

$$= 2\pi \left(-x^2 \cos(x) + 2x \operatorname{sen}(x) + 2\cos(x)\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= 2\pi \Big[\Big( -\pi^2 \cos(\pi) + 2\pi \operatorname{sen}(\pi) + 2\cos(\pi)\Big) - \Big(0 + 0 + 2\cos(0)\Big)\Big]$$

Como $\cos(0) = 1\,,\ \cos(\pi) = -1$ e $\operatorname{sen}(\pi) = 0$

$$V = 2\pi\Big[\left(\pi^2 + 0 - 2\right) - 2\Big] = 2\pi\left(\pi^2 - 4\right) = 2\pi^3 - 8\pi$$

# Conteúdo

# Lista Mínima

Estudar a Seção 4.1 da Apostila

Exercícios: 1a-f, 2, 3, 9

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações