Integrais de Funções Trigonométricas

2 – Tangentes e Secantes

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

17 de agosto de 2025

Conteúdo

Tangente e Secante

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Lista Mínima

Tangente $\times$ secante

Estratégias para calcular

$$\int \operatorname{tg}^m(x) \sec^n(x)\, dx$$

Potência da $\sec(x)$ é par

Potência da secante $n = 2k$ com $k \geq 2$

1. Guarde um fator $\sec^2(x)$
2. Use que $\sec^2(x) = 1 + \operatorname{tg}^2(x)$
3. Faça a substituição $u = \operatorname{tg}(x)$

Potência da $\operatorname{tg}(x)$ é ímpar

Potência da $\operatorname{tg}(x)$ é ímpar

1. Guarde um fator $\sec(x)\operatorname{tg}(x)$
2. Use que $\operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x) - 1$
3. Faça a substituição $u = \sec(x)$

Outros Casos

Não tem regra geral

Dependem de manipulações trigonométricas específicas

Conteúdo

Tangente e Secante

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Lista Mínima

Exemplo 1

Encontre $\displaystyle\int \operatorname{tg}^6(x)\sec^4(x)\,dx$

Integral do tipo

$$\int \operatorname{tg}^m(x)\sec^n(x)\,dx \qquad n = 2k \quad k \geq 2$$

Guardar $\sec^2(x)$

Usar $\sec^2(x) = 1 + \operatorname{tg}^2(x)$

Exemplo 1

$$F = \int \operatorname{tg}^6(x) \sec^4(x)\, dx$$

$$= \int \operatorname{tg}^6(x) \sec^2(x) \sec^2(x)\, dx$$

$$= \int \operatorname{tg}^6(x) \left(1 + \operatorname{tg}^2(x)\right) \sec^2(x)\, dx$$

Substituição simples

$$u = \operatorname{tg}(x) \qquad du = \sec^2(x) dx$$

$$F = \int u^6 \left(1 - u^2\right)\, du$$

Exemplo 1

$$F = \int u^6 \left(1 + u^2\right) du$$

$$\int u^6 + u^8 \, du$$

$$= \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C$$

$$= \frac{1}{7} \operatorname{tg}^7(x) + \frac{1}{9} \operatorname{tg}^9(x) + C$$

Conteúdo

Tangente e Secante

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Lista Mínima

Exemplo 2

Encontre $\displaystyle\int \operatorname{tg}^5(x)\sec^7(x)\,dx$

Integral do tipo

$$\int \operatorname{tg}^m(x)\sec^n(x)\,dx \qquad m \text{ ímpar}$$

Guardar $\sec(x)\operatorname{tg}(x)$

Usar $\operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x) - 1$

Exemplo 2

$$F = \int \operatorname{tg}^5(x)\sec^7(x)\,dx$$

$$= \int \operatorname{tg}^4(x)\sec^6(x) \quad \sec(x)\operatorname{tg}(x)\,dx$$

$$= \int \left[\operatorname{tg}^2(x)\right]^2 \sec^6(x) \quad \sec(x)\operatorname{tg}(x)\,dx$$

$$= \int \left[\sec^2(x) - 1\right]^2 \sec^6(x) \quad \sec(x)\operatorname{tg}(x)\,dx$$

Substituição simples

$$u = \sec(x) \qquad du = \sec(x)\operatorname{tg}(x)dx$$

$$F = \int (u^2 - 1)^2 u^6\,du$$

Exemplo 2

$$
\begin{aligned}
F &= \int \left(u^2 - 1\right)^2 u^6 \, du \\
&= \int \left(u^4 - 2u^2 + 1\right) u^6 \, du \\
&= \int u^{10} - 2u^8 + u^6 \, du \\
&= \frac{u^{11}}{11} - \frac{2u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C \\
&= \frac{1}{11}\sec^{11}(x) - \frac{2}{9}\sec^9(x) + \frac{1}{7}\sec^7(x) + C
\end{aligned}
$$

Conteúdo

Tangente e Secante

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Lista Mínima

Exemplo 3

Calcule $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3(x)\,dx$

Integral do tipo

$$\int \operatorname{tg}^m(x)\sec^n(x)\,dx \qquad n = 0 \quad m \text{ ímpar}$$

Usar $\operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x) - 1$

Exemplo 3

$$
\begin{aligned}
F &= \int \operatorname{tg}^3(x)\, dx \\
&= \int \operatorname{tg}(x) \operatorname{tg}^2(x)\, dx \\
&= \int \operatorname{tg}(x) \big(\sec^2(x) - 1 \big)\, dx \\
&= \int \operatorname{tg}(x) \sec^2(x)\, dx - \int \operatorname{tg}(x)\, dx
\end{aligned}
$$

Exemplo 3

$$G = \int \operatorname{tg}(x) \sec^2(x)\, dx$$

Substituição

$$u = \operatorname{tg}(x) \qquad du = \sec^2(x) dx$$

$$\begin{aligned} G &= \int \operatorname{tg}(x) \sec^2(x)\, dx \\ &= \int u\, du \\ &= \frac{u^2}{2} + C \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(x) + C \end{aligned}$$

Exemplo 3

Logo,

$$
\begin{aligned}
F &= \int \operatorname{tg}^3(x)\,dx \\
&= \int \operatorname{tg}(x)\sec^2(x)\,dx - \int \operatorname{tg}(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2(x) + \ln|\cos(x)| + C
\end{aligned}
$$

Conteúdo

Tangente e Secante

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Lista Mínima

Lista Mínima

Estudar a Seção 4.3 da Apostila

Exercícios: 1i, 1j, 1m

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações