Sequências Numéricas

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

17 de agosto de 2025

Conteúdo

Definição de Sequências

Uma sequência é uma lista de números em uma ordem determinada

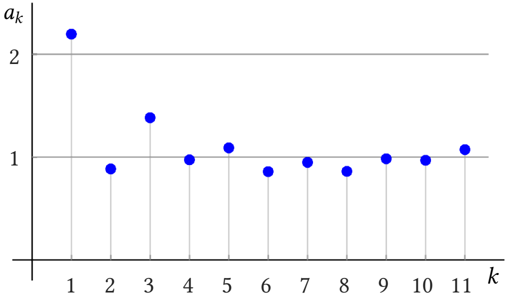
$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_k,\ \ldots$$

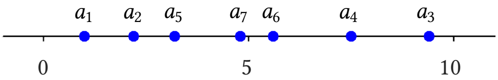
$\boldsymbol{a_k}$ são os termos e $\boldsymbol{k}$ são os índices da sequência

Uma sequência também é uma função

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad \boldsymbol{a_k = f(k)}$$

Definição de Sequências





Exemplo 1

Dada a fórmula para o n-ésimo termo, a_n, de uma sequência (a_n), encontre os valores de a_1, a_2, a_3 e a_4.

$$a_n = \frac{1-n}{n^2}$$

Exemplo 2

$$a_1 = \left.\frac{1-n}{n^2}\right|_{n=1} = \frac{1-1}{1^2} = 0$$

$$a_2 = \left.\frac{1-n}{n^2}\right|_{n=2} = \frac{1-2}{2^2} = -\frac{1}{4}$$

$$a_3 = \left.\frac{1-n}{n^2}\right|_{n=3} = \frac{1-3}{3^2} = -\frac{2}{9}$$

$$a_4 = \left.\frac{1-n}{n^2}\right|_{n=4} = \frac{1-4}{4^2} = -\frac{3}{16}$$

Exemplo 2

Encontre uma fórmula explícita para o n-ésimo termo da sequência

$$(0, 3, 8, 15, 24, \ \ldots\ )$$

Exemplo 2

Sequência dos quadrados dos inteiros positivos menos um

$$a_n = n^2 - 1$$

Exemplo 2

Verificando

$$a_1 = (n^2 - 1)\Big|_{n=1} = 1^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0$$

$$a_2 = (n^2 - 1)\Big|_{n=2} = 2^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$$

$$a_3 = (n^2 - 1)\Big|_{n=3} = 3^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$$

$$a_4 = (n^2 - 1)\Big|_{n=4} = 4^2 - 1 = 4^2 - 1 = 15$$

$$a_5 = (n^2 - 1)\Big|_{n=5} = 5^2 - 1 = 5^2 - 1 = 24$$

Exemplo 2

Expressão alternativa

$$a_n = -\frac{1}{3}n^4 + \frac{10}{3}n^3 - \frac{32}{3}n^2 + \frac{50}{3}n - 9$$

Conteúdo

Convergência de Sequências

(a_k) converge para L se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\boldsymbol{N} \in \mathbb{N}$ tal que

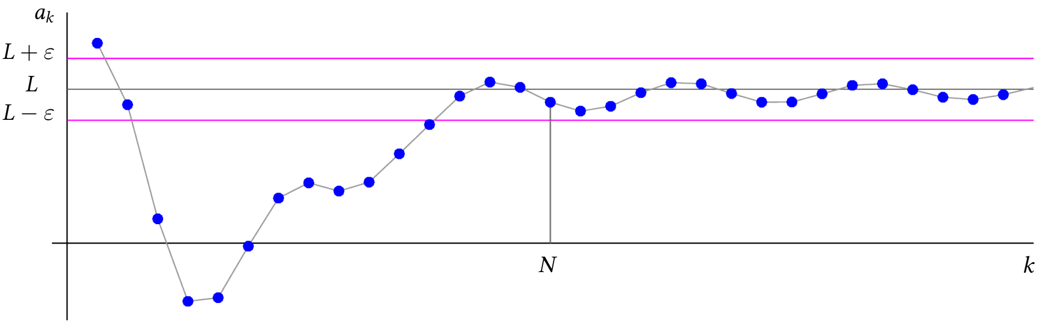
$$k > \boldsymbol{N} \quad \Rightarrow \quad |a_k - L| < \varepsilon$$

Notação

$$\lim_{k \to \infty} a_k = L \qquad \text{ou} \qquad a_k \to L \qquad \text{ou} \qquad \lim a_k = L$$

Uma sequência convergente (a_k) tem apenas um limite.

Definição de Limite



Explorando a Definição

Percebemos que a sequência $a_k = \dfrac{1}{k}$ converge para $L = 0$

Para $\varepsilon = 1$	basta	$N = 1$
Para $\varepsilon = 0{,}001$	precisamos	$N = 1000$

Quantos passos precisamos para garantir uma precisão de ε qualquer?

Explorando a Definição

Precisamos encontrar um N que garanta $|a_k - L| < \varepsilon$ para todo $k > N$

$$| \, a_k - L \, | = \left| \frac{1}{k} - 0 \right| = \frac{1}{k}$$

então

$$| \, a_k - L \, | < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{k} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon} < k$$

escolhemos

$$N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \qquad \text{menor inteiro maior ou igual a } \frac{1}{\varepsilon}$$

Divergência ao infinito

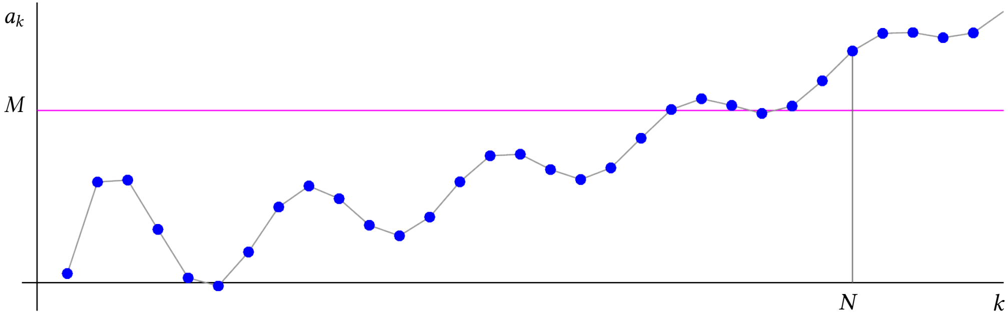
(a_k) **diverge** ao infinito se dado $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}$ existe $\boldsymbol{N} \in \mathbb{N}$ tal que

$$k > \boldsymbol{N} \quad \Rightarrow \quad a_k > \boldsymbol{M}$$

Notação

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \infty \qquad \text{ou} \qquad a_k \to \infty \qquad \text{ou} \qquad \lim a_k = \infty$$

Divergência ao infinito



Casos Particulares Importantes

- Se $|r| < 1$, então $\lim r^k = 0$
- Se $r = 1$, então $\lim r^k = 1$
- Se $r > 1$, então $\lim r^k = \infty$
- Se $r \leq -1$, então $\lim r^k$ diverge

Propriedades de Sequências Convergentes

Sejam (a_k) e (b_k) sequências convergentes, então temos as regras

1. $\lim(a_k + b_k) = \lim a_k + \lim b_k$ — Soma
2. $\lim(a_k - b_k) = \lim a_k - \lim b_k$ — Diferença
3. $\lim(ca_k) = c \lim a_k, \quad \forall\ c \in \mathbb{R}$ — Multiplicação por escalar
4. $\lim(a_k\, b_k) = (\lim a_k)(\lim b_k)$ — Produto
5. $\lim \dfrac{a_k}{b_k} = \dfrac{\lim a_k}{\lim b_k}$ desde que $\lim b_k \neq 0$ — Quociente

Propriedades de Sequências Convergentes

Note que o contrário não vale

Considere as sequências divergentes

$$a_k = k \qquad\qquad b_k = -k$$

a soma é convergente

$$c_k \;=\; a_k + b_k \;=\; k + (-k) \;=\; 0$$

Exemplo

Sendo $0 < r < 1$, calcule o limite da sequência $a_k = \dfrac{-\dfrac{1}{r^k} + 7}{1 + \dfrac{5}{r^k}}$

$$\lim a_k = \lim \left(\frac{-\dfrac{1}{r^k} + 7}{1 + \dfrac{5}{r^k}} \right) = \lim \left(\frac{\dfrac{-1 + 7r^k}{r^k}}{\dfrac{r^k + 5}{r^k}} \right) = \lim \left(\frac{-1 + 7r^k}{r^k + 5} \right)$$

$$= \frac{-1 + 7\lim(r^k)}{\lim(r^k) + 5}$$

$$\lim r^k = 0$$

$$= -\frac{1}{5}$$

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar as Seções 5.1 e 5.2 da Apostila

Exercícios Seção 5.2: 3a-d, 4, 7, 11, 12, 13

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações