Séries Numéricas – Exemplos

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

17 de agosto de 2025

Conteúdo

Séries Geométricas

Uma Série Geométrica é uma série com a forma

$$\alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \alpha r^3 + \cdots + \alpha r^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha r^{n-1}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$	número fixo não nulo, $\alpha \neq 0$
$r \in \mathbb{R}$	razão da série
$a_n = \alpha r^{n-1}$	termo geral

Especial pois sabemos quando converge e qual sua soma

Convergência da Série Geométrica – Parte 1

Se $r = 1$ temos

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha\, 1^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha = \underbrace{\alpha + \cdots + \alpha}_{n \text{ vezes}} = n\alpha$$

Portanto S_n diverge quando $n \to \infty$

Convergência da Série Geométrica – Parte 2

Se $r \neq 1$ temos

$$S_n = \alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \cdots + \alpha r^{n-1}$$

$$rS_n = \qquad \alpha r + \alpha r^2 + \cdots + \alpha r^{n-1} + \alpha r^n$$

$$S_n - rS_n = \alpha - \alpha r^n$$

$$S_n(1 - r) = \alpha - \alpha r^n$$

$$S_n = \frac{\alpha(1 - r^n)}{1 - r} \qquad\qquad (r \neq 1)$$

Calculando o Limite

Com $r \neq 1$, temos $S_n = \dfrac{\alpha(1-r^n)}{1-r}$, portanto

$$\lim S_n = \lim \frac{\alpha(1-r^n)}{1-r} = \frac{\alpha}{1-r} - \frac{\alpha}{1-r} \lim r^n$$

$r = -1$ $\quad$ $r^n = (-1)^n$ diverge quando $n \to \infty$ portanto S_n diverge

$|r| > 1$ $\quad$ $|r^n| \to \infty$ quando $n \to \infty$ portanto S_n diverge

$|r| < 1$ $\quad$ $r^n \to 0$ quando $n \to \infty$ portanto $S_n \to \dfrac{\alpha}{1-r}$

Séries Geométricas

Uma série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha r^{n-1}$$

é convergente se $|r| < 1$ com soma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha r^{n-1} = \frac{\alpha}{1 - r}$$

e divergente se $|r| \geq 1$

Conteúdo

Séries Telescópicas

Raramente conseguimos fórmulas exatas para a soma de séries

Séries Telescópicas são um caso especial onde quase todos os termos se anulam

Exemplo

Calcular a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

Somas Parciais

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+1} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+1} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}
$$

Calculando o Limite

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) &= \lim_{n \to \infty} S_n \\
&= \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Pode Não Ser Óbvio

Calcular a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Usando frações parciais

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar as Seção 6.1 da Apostila

Exercícios: 8a-c, 10, 11a-b

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações