Séries de Taylor – Série Binomial

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

Conteúdo

Como avaliar funções potência?

Como avaliar funções potência?

- $f(x) = x^r$
- $f(x) = \sqrt[3]{x}$
- $f(x) = x^{5/7}$

Derivadas da Função Binomial

Construir a série de Taylor da função $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ onde α uma é constante

$$f^{(0)}(x) = (1+x)^{\alpha}$$

$$f^{(1)}(x) = (1+x)^{\alpha-1}\ \alpha$$

$$f^{(2)}(x) = (1+x)^{\alpha-2}\ \alpha(\alpha-1)$$

$$f^{(3)}(x) = (1+x)^{\alpha-3}\ \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (1+x)^{\alpha-n}\ \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(n-1))$$

$$= (1+x)^{\alpha-n}\ \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)$$

Derivadas da Função Binomial em Zero

Avaliando as derivadas em $x = 0$ temos $(1+x)^p = 1$ para todo p

$$f^{(0)}(0) = 1$$

$$f^{(1)}(0) = \alpha$$

$$f^{(2)}(0) = \alpha(\alpha - 1)$$

$$f^{(3)}(0) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)\cdots(\alpha - n + 1)$$

Coeficientes de Taylor da Função Binomial

Os coeficientes $c_n = \dfrac{f^{(n)}}{n!}$ da Série de Taylor são

$$c_0 = 1$$

$$c_1 = \alpha$$

$$c_2 = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}$$

$$c_3 = \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!}$$

$$\vdots$$

$$c_n = \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)\cdots(\alpha - n + 1)}{n!}$$

Coeficiente Binomial

Número maneiras de escolher n elementos de um total de k

$$\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!}$$

$$= \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)(k-n)!}{n!(k-n)!}$$

$$= \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}$$

Coeficiente Binomial

Por similaridade, definimos para α real

$$\binom{\alpha}{0} = 1$$

$$\binom{\alpha}{1} = \alpha$$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha + 1 - n)}{n!} \qquad n \geq 2$$

Série Binomial

Para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $-1 < x < 1$ temos

$$
\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \\
&= \binom{\alpha}{0} x^0 + \binom{\alpha}{1} x^1 + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \cdots \\
&= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \binom{\alpha}{4} x^4 + \cdots
\end{aligned}
$$

Verificaremos depois que a série é igual a função no intervalo especificado.

Conteúdo

Exemplo 1

Encontre a Série de Taylor da função $\sqrt{x+1}$

Exemplo 1

Sabemos que

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

portanto

$$\sqrt{x+1} = (1+x)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n$$

Exemplo 2

Encontre o Polinômio de Taylor de terceiro grau da função $\sqrt{x+1}$

Exemplo 2

A série de Taylor da função é

$$\sqrt{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n$$

Portanto o Polinômio de Taylor de terceiro grau é

$$P_3(x) = \sum_{n=0}^{3} \binom{1/2}{n} x^n$$

Exemplo 2

$$
\begin{aligned}
P_3(x) &= \sum_{n=0}^{3} \binom{1/2}{n} x^n \\
&= \binom{1/2}{0} x^0 + \binom{1/2}{1} x^1 + \binom{1/2}{2} x^2 + \binom{1/2}{3} x^3 \\
&= 1 + \frac{1}{2} x + \frac{1/2\left(1/2 - 1\right)}{2!} x^2 + \frac{1/2\left(1/2 - 1\right)\left(1/2 - 2\right)}{3!} x^3 \\
&= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3

Encontre a Série de Taylor da função $\sqrt[3]{x}$

Exemplo 3 – Obtendo a Série

Escrevemos a função na forma binomial

$$\sqrt[3]{x} = x^{1/3} = \left(1 + (x-1)\right)^{1/3} = (1+y)^{1/3}$$

onde $y = x - 1$

Usando a Série Binomial

$$(1+y)^{1/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n} y^n \qquad y \in (-1, 1)$$

Exemplo 3 – Convergência

Desfazendo a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} -1 &< y < 1 \\ -1 &< x - 1 < 1 \\ 0 &< x < 2 \end{aligned}$$

A série converge para $x \in (0, 2)$

Exemplo 3 – Examinando os Termos da Série

$$\sqrt[3]{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n} (x-1)^n$$

$$= \binom{1/3}{0}(x-1)^0 + \binom{1/3}{1}(x-1)^1 + \binom{1/3}{2}(x-1)^2 + \binom{1/3}{3}(x-1)^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{3}(x-1) + \frac{1/3\,(1/3-1)}{2}(x-1)^2 + \frac{1/3\,(1/3-1)\,(1/3-2)}{3!}(x-1)^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{5}{81}(x-1)^3 + \cdots$$

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar a Seção 8.1 da Apostila

Exercício: 8

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações