Usos da Séries de Taylor – Arco Tangente

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

Conteúdo

Arco Tangente

Calcular a Série de Taylor de

$$\operatorname{arctg}(x)$$

Sabemos que

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Arco Tangente

Calculando as derivadas

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\operatorname{arctg}(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\operatorname{arctg}(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

$$\frac{d^4}{dx^4}\operatorname{arctg}(x) = -\frac{24x(x^2-1)}{(1+x^2)^4}$$

Não é um bom método!

Arco Tangente

Cálculos formais (sem rigor)

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Soma de uma série geométrica com $a = 1$ e $r = -x^2$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{1-r} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

Integrando os dois lados

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots$$

Problema

Como sabemos se os limites convergem?

Demonstrando a Série de Taylor do Arco Tangente

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + (-1)^{n+1} t^{2(n+1)} + \cdots$$

Usando a fórmula da soma da Série Geométrica a partir de $n+1$

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2(n+1)}}{1+t^2}$$

Agora temos um número finito de termos

Integrando a Soma Finita

Escrevendo a derivada como uma soma finita

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg} x = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)}}{1+x^2}$$

Integrando

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2(n+1)}}{1+t^2}\, dt$$

A Série de Taylor Converge se o Erro Tende a Zero

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2(n+1)}}{1+t^2}\, dt$$

como $\quad 1 + t^2 \geq 1$

$$|R_n(x)| \leq \int_0^{|x|} t^{2(n+1)}\, dt \;=\; \left.\frac{t^{2n+3}}{2n+3}\right|_0^{|x|} \;=\; \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \qquad \text{quando} \qquad |x| \leq 1$$

Série de Taylor do Arco Tangente

Para todo $x \in [-1, 1]$ temos

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots$$

Conteúdo