# Integrais e Séries – Prova 1 – Turma 4 31/08/2023

Nome ________________________________________

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

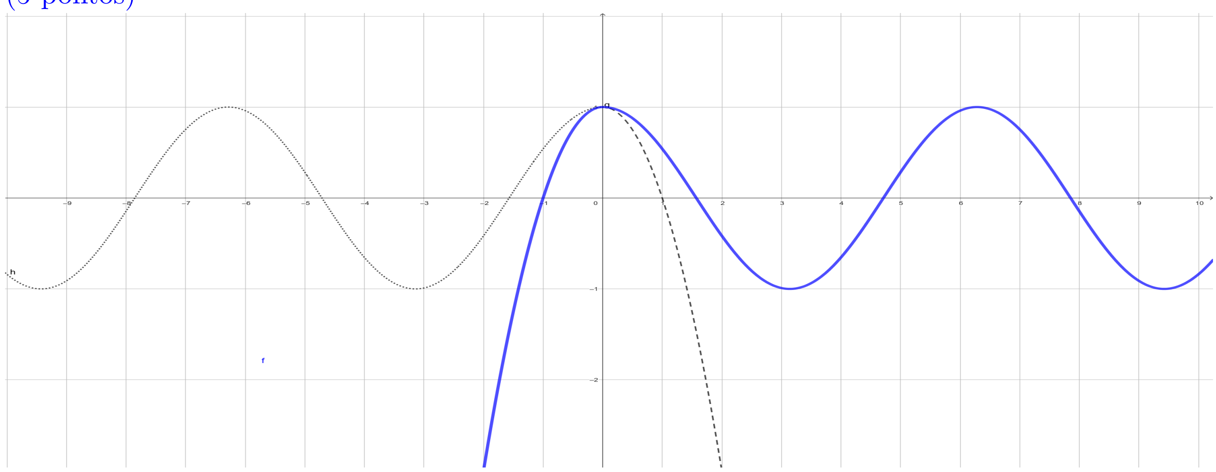
**1** [25] Dada a função $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0 \\ \cos(x), & x \geq 0 \end{cases}$

a) Esboce o gráfico de $f$

b) Calcule $\displaystyle\int f(x)\,dx$

c) Calcule $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$

a) (5 pontos)



b) (10 pontos)
Considerando o intervalo $(-\infty, 0)$, temos

$$\int f(x)\,dx = \int 1 - x^2\,dx = x - \frac{x^3}{3} + C$$

No intervalo $[0, \infty)$, temos

$$\int f(x)\,dx = \int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C$$

Portanto a primitiva de $f$ é

$$F(x) = \begin{cases} x - \dfrac{x^3}{3} + C, & x < 0 \\ \operatorname{sen}(x) + C, & x \geq 0 \end{cases}$$

c) (10 pontos)
Para calcular a integral definida precisamos dividir o intervalo em duas partes

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{0} 1 - x^2\,dx + \int_{0}^{\pi} \cos(x)\,dx \\
&= \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} + \operatorname{sen}(x)\Big|_{0}^{\pi} \\
&= 0 - \left((-\pi) - \frac{(-\pi)^3}{3}\right) + \operatorname{sen}(\pi) - \operatorname{sen}(0) \\
&= \pi - \frac{\pi^3}{3}
\end{aligned}$$

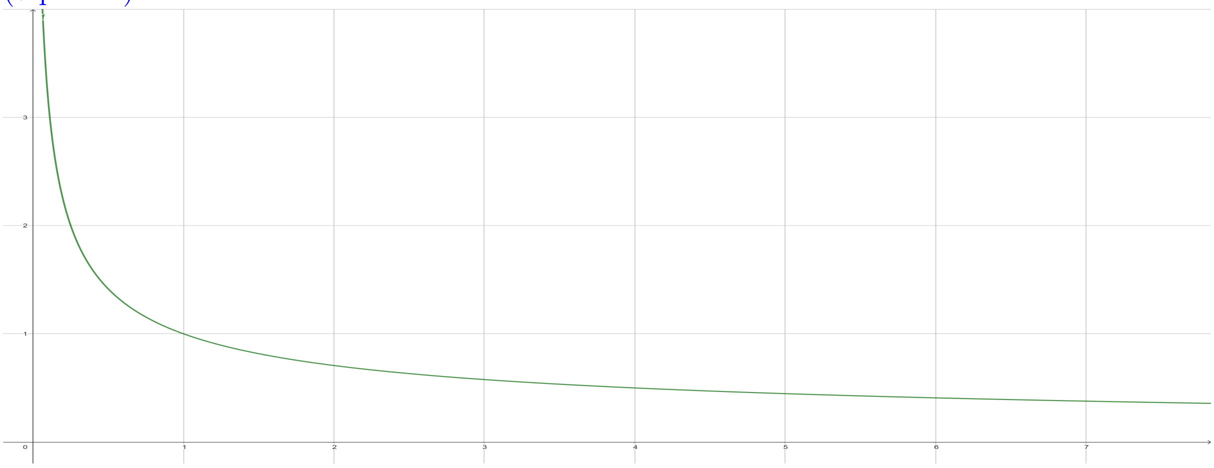
**2** [25] Data a função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

a) Esboce o gráfico de $f$

b) Calcule sua primitiva

c) Calcule $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$

a) (5 pontos)




b) (10 pontos)

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-1/2}\,dx = \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C = \frac{x^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{x} + C$$

c) (10 pontos)

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \lim_{a\to 0}\int_a^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to 0}\left[2\sqrt{x}\Big|_a^4\right] = \lim_{a\to 0}\left(2\sqrt{4} - 2\sqrt{a}\right) = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{0} = 4$$

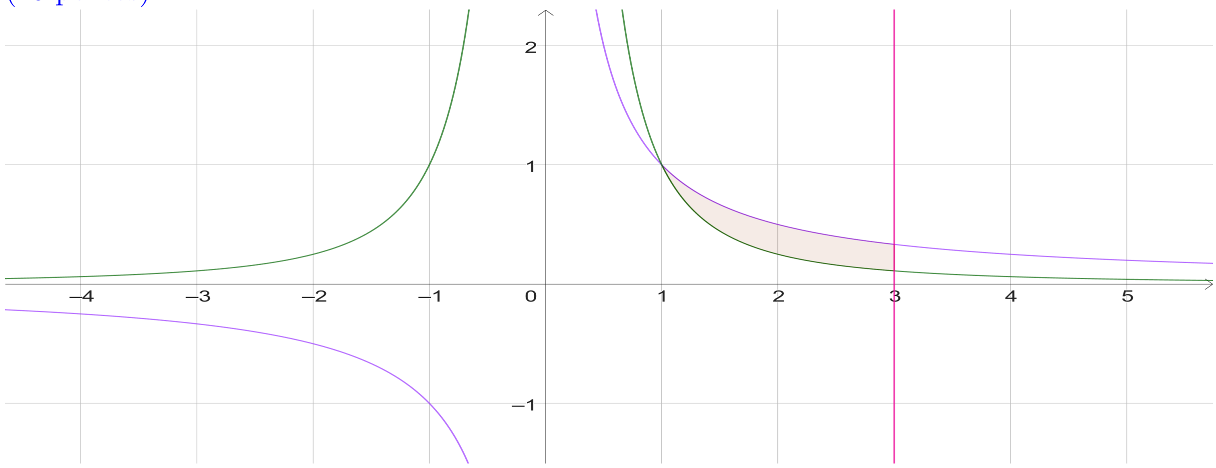
**3** [25] Considerando as curvas

$$y = \frac{1}{x}, \qquad y = \frac{1}{x^2} \qquad \text{e} \qquad x = 3$$

a) Esboce o gráfico das curvas e indique a área entre elas

b) Calcule a área

a) (10 pontos)




b) (15 pontos)
Para encontrar o ponto de interseção resolvemos e equação a seguir sabendo que $x > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \frac{1}{x^2}\\
x^2 &= x\\
x &= 1
\end{aligned}$$

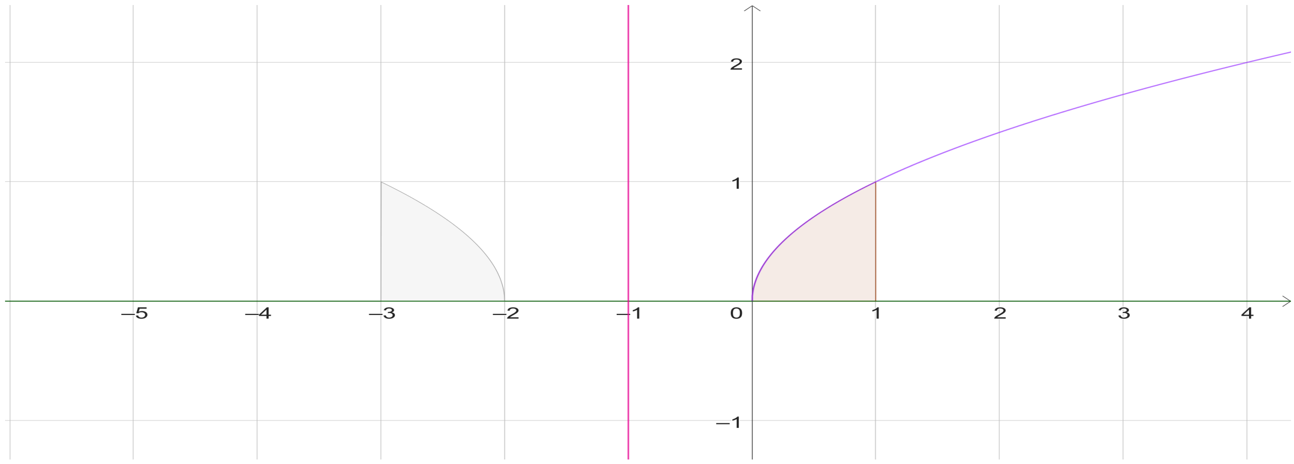
Podemos agora calcular a área, sabendo que no intervalo $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{x^2}$

$$\begin{aligned}
A &= \int_1^3 \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\,dx\\
&= \int_1^3 x^{-1} - x^{-2}\,dx\\
&= \left(\ln|x| - \frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right)\Bigg|_1^3\\
&= \left(\ln(x) + \frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^3\\
&= \left(\ln(3) + \frac{1}{3}\right) - \left(\ln(1) + \frac{1}{1}\right)\\
&= \ln(3) + \frac{1}{3} - 1\\
&= \ln(3) - \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

**4** [25] Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas

$$y = \sqrt{x}, \qquad y = 0 \qquad \text{e} \qquad x = 1$$

em torno da reta $x = -1$




Usando cascas cilíndricas, o volume é dado por

$$V = \int_a^b 2\pi r(x)h(x)\,dx$$

Pelo gráfico verificamos que

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 1 \\ r(x) &= x+1 \\ h(x) &= \sqrt{x} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b 2\pi r(x)h(x)\,dx \\ &= \int_0^1 2\pi(x+1)\sqrt{x}\,dx && \text{(15 pontos)} \\ &= 2\pi \int_0^1 (x+1)x^{1/2}\,dx \\ &= 2\pi \int_0^1 x^{3/2} + x^{1/2}\,dx \\ &= 2\pi \left( \frac{x^{3/2+1}}{3/2+1} + \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} \right) \Bigg|_0^1 \\ &= 2\pi \left( \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{2}{3}x^{3/2} \right) \Bigg|_0^1 \\ &= 2\pi \left[ \left( \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \right) - 0 \right] \\ &= 2\pi \frac{6+10}{15} \\ &= \frac{32\pi}{15} && \text{(10 pontos)} \end{aligned}$$