NOME ____

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

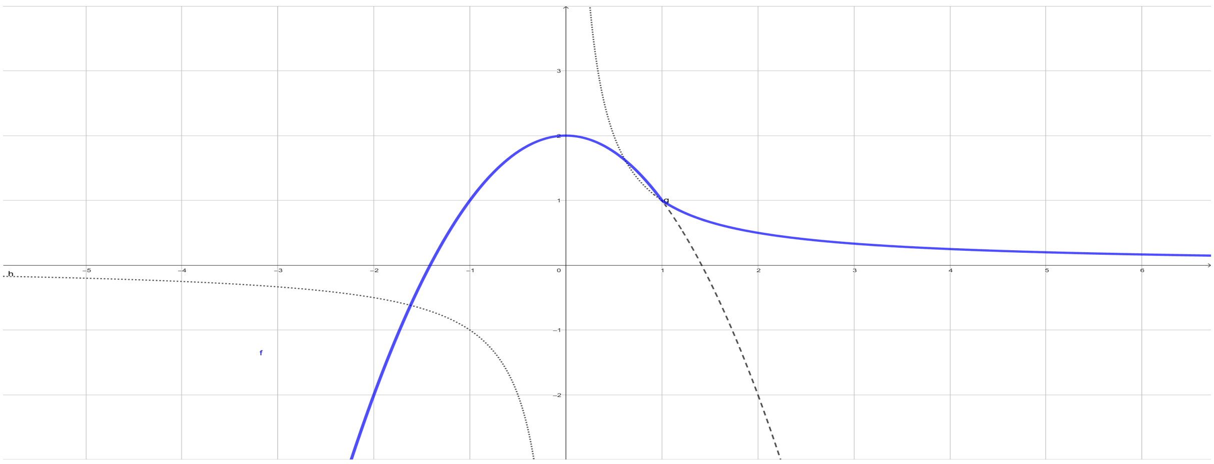
1 [25] Dada a função $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$

a) Esboce o gráfico de f

b) Calcule $\displaystyle\int f(x)\,dx$

c) Calcule $\displaystyle\int_0^e f(x)\,dx$

a) Gráfico



b) Considerando o intervalo $(-\infty, 1]$, temos

$$\int f(x)\,dx = \int 2 - x^2\,dx = 2x - \frac{x^3}{3} + C_1$$

No intervalo $(1, \infty)$, temos

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C_2 = \ln(x) + C_2$$

Portanto a primitiva de f é

$$F(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^3}{3} + C, & x < 0 \\ \ln(x) + C_2, & x \geq 0 \end{cases}$$

c) Para calcular a integral definida precisamos dividir o intervalo em duas partes

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^e f(x)\,dx \\
&= \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^\pi f(x)\,dx \\
&= \int_0^e 2 - x^2\,dx + \int_1^e \frac{1}{x}\,dx \\
&= \left(2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 + \ln(x)\Big|_1^e \\
&= \left(2 - \frac{1}{3}\right) - 0 + \ln(e) - \ln(1) \\
&= 2 - \frac{1}{3} + 1 \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

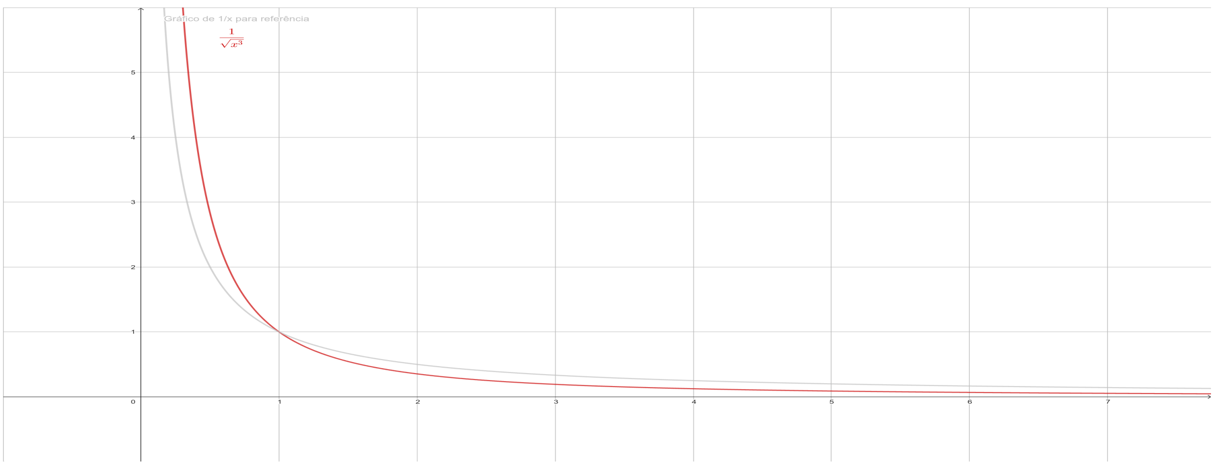
2 [25] Data a função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$

a) Esboce o gráfico de f

b) Calcule sua primitiva

c) Calcule $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$

a) Gráfico



b) $\displaystyle\int f(x)dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \int \frac{dx}{x^{3/2}} = \int x^{-3/2}dx = \frac{x^{-3/2+1}}{-3/2+1} + C = \frac{x^{-1/2}}{-1/2} + C = \frac{-2}{x^{1/2}} + C = \frac{-2}{\sqrt{x}} + C$

c) $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-3/2}dx = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{x}}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-2}{\sqrt{b}} - \left(\frac{-2}{\sqrt{1}}\right)\right] = \lim_{b\to\infty}\frac{2}{\sqrt{a}} + 2 = 2$

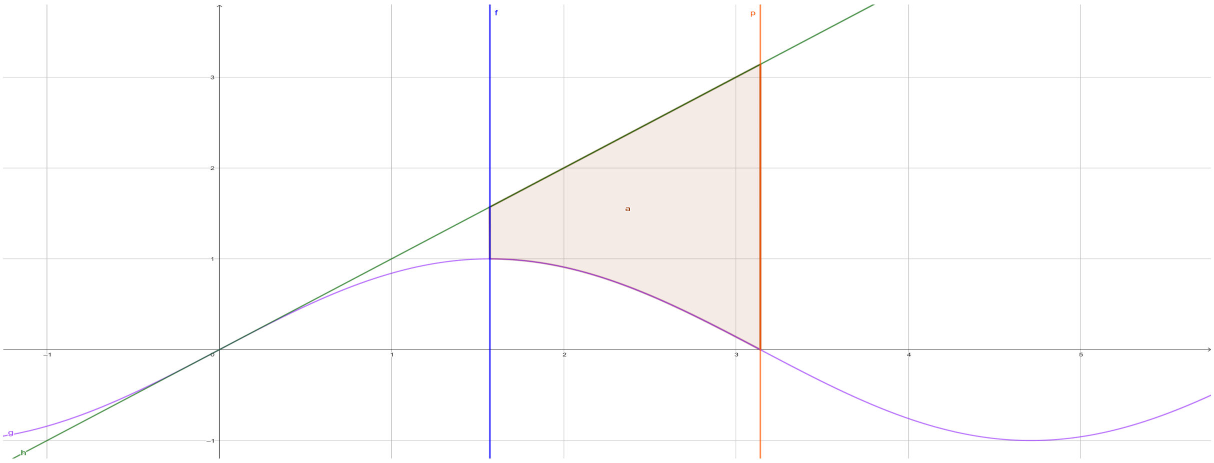
3 [25] Considerando as curvas

$$y = \operatorname{sen}(x), \qquad y = x, \qquad x = \frac{\pi}{2} \qquad \text{e} \qquad x = \pi$$

a) Esboce o gráfico das curvas e indique a área entre elas

b) Calcule a área

a) Gráfico



b)

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{\pi/2}^{\pi} x - \operatorname{sen}(x)\, dx \\
&= \left(\frac{x^2}{2} + \cos(x)\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi} \\
&= \left(\frac{\pi^2}{2} + \cos(\pi)\right) - \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{1}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2 \times 4} + \cos(\pi) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{4\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{8} - 1 - 0 = \frac{3}{8}\pi^2 - 1
\end{aligned}
$$

4 [25] Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas

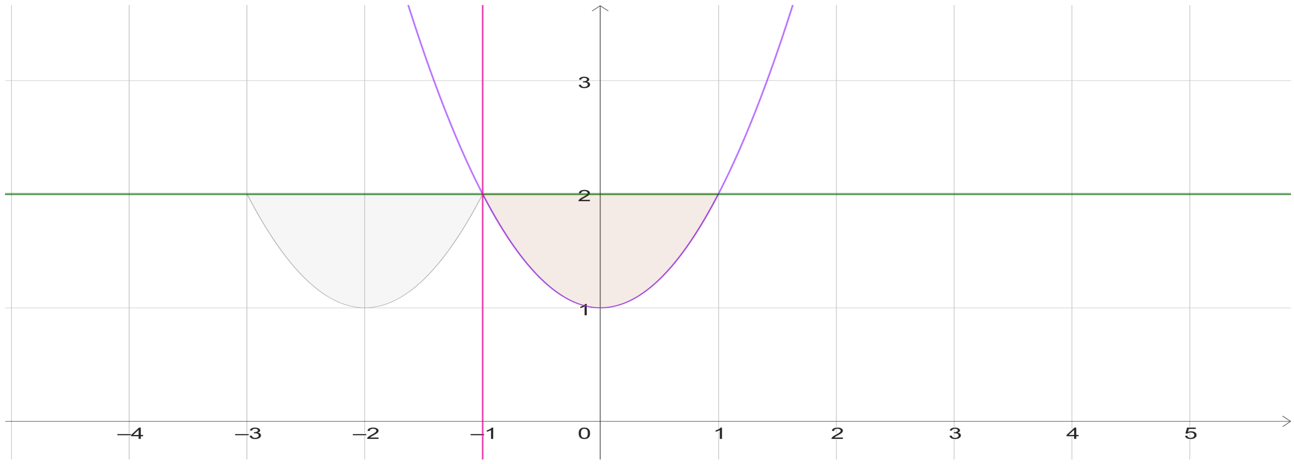
$$y = x^2 + 1 \qquad \text{e} \qquad y = 2$$

em torno da reta $x = -1$

Calculando os pontos de interseção

$$
\begin{aligned}
x^2 + 1 &= 2 \\
x^2 &= 1 \\
x &= \pm 1
\end{aligned}
$$

Esboçado o gráfico



Usando cascas cilíndricas, o volume é dado por

$$V = \int_a^b 2\pi r(x)h(x)\,dx$$

Pelo gráfico verificamos que

$$\begin{aligned} a &= -1 \\ b &= 1 \\ r(x) &= x+1 \\ h(x) &= 2-\left(x^2+1\right) = 1-x^2 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b 2\pi r(x)h(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} 2\pi(x+1)\left(1-x^2\right)\,dx & \text{(15 pontos)} \\ &= 2\pi\int_{-1}^{1} x-x^3+1-x^2\,dx \\ &= 2\pi\int_{-1}^{1} -x^3-x^2+x+1\,dx \\ &= 2\pi\left(-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-1}^{1} \\ &= 2\pi\left[\left(-\frac{1^4}{4}-\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}+1\right)-\left(-\frac{(-1)^4}{4}-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}+(-1)\right)\right] \\ &= 2\pi\left[-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1+\frac{(-1)^4}{4}+\frac{(-1)^3}{3}-\frac{(-1)^2}{2}-(-1)\right] \\ &= 2\pi\left[-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1\right] \\ &= 2\pi\left[2-\frac{2}{3}\right] \\ &= 2\pi\frac{4}{3} \\ &= \frac{8\pi}{3} & \text{(10 pontos)} \end{aligned}$$