INTEGRAIS E SÉRIES – PROVA 2 – TURMA 4 03/10/2023

NOME ____

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [20]

a-b

Use **integral por partes** para provar que $\displaystyle\int_0^1 x^n e^x\,dx = e - n\int_0^1 x^{n-1}e^x dx$

Calculando a integral indefinida por partes $\displaystyle\int udv = uv - \int vdu$

Escolhendo

$$u = x^n \qquad dv = e^x dx$$

temos

$$du = nx^{n-1}dx \qquad v = e^x$$

então

$$\begin{aligned}\int x^n e^x\,dx &= x^n e^x - \int e^x n x^{n-1} dx\\ &= x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx\end{aligned}$$

Calculando a integral definida

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n e^x\,dx &= x^n e^x\Big|_0^1 - n\int_0^1 x^{n-1}e^x dx\\ &= \left(1^n e^1\right) - \left(0^n e^0\right) - n\int_0^1 x^{n-1}e^x dx\\ &= e - n\int_0^1 x^{n-1}e^x dx\end{aligned}$$

2 [20] Use **substituição simples** para calcular a integral $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\mathrm{sen}\left(1+\sqrt{x^3}\right)dx$

Temos que

$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{sen}\left(1+\sqrt{x^3}\right)dx = \int x^{1/2}\,\mathrm{sen}\left(1+x^{3/2}\right)dx$$

Escolhemos a substituição

$$u = 1 + x^{3/2} \qquad du = \frac{3}{2}x^{1/2}dx \qquad x^{1/2}dx = \frac{2du}{3}$$

portanto

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}\,\mathrm{sen}\left(1+\sqrt{x^3}\right)dx &= \int \mathrm{sen}\left(1+x^{3/2}\right)x^{1/2}dx\\ &= \frac{2}{3}\int \mathrm{sen}(u)du\\ &= \frac{2}{3}(-\cos(u))+c\\ &= -\frac{2}{3}\cos\left(1+x^{3/2}\right)+c\\ &= -\frac{2}{3}\cos\left(1+\sqrt{x^3}\right)+c\end{aligned}$$

3 [40] Escolha dois itens e calcule as primitivas das funções correspondentes

a) $\square$ $f(x) = \cos^5(x)\,\mathrm{sen}^2(x)$

b) $\square$ $g(x) = \mathrm{tg}^3(x)\sec^4(x)$

c) $\square$ $h(x) = \dfrac{x^5}{\sqrt{4-x^2}}$

Marque sua escolha nas caixas, caso contrário, serão corrigidos dois itens aleatoriamente.

a)

$$\begin{aligned}F &= \int f(x)dx\\ &= \int \cos^5(x)\,\mathrm{sen}^2(x)dx\\ &= \int \left(\cos^2(x)\right)^2\mathrm{sen}^2(x)\cos(x)dx\\ &= \int \left(1-\mathrm{sen}^2(x)\right)^2\mathrm{sen}^2(x)\cos(x)dx\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $\quad u = \mathrm{sen}(x) \quad du = \cos(x)dx$

$$\begin{aligned}F &= \int \left(1-u^2\right)^2u^2du\\ &= \int \left(1-2u^2+u^4\right)u^2du\\ &= \int u^2-2u^4+u^6\,du\\ &= \frac{1}{3}u^3-\frac{2}{5}u^5+\frac{1}{7}u^7+c\\ &= \frac{1}{3}\mathrm{sen}^3(x)-\frac{2}{5}\mathrm{sen}^5(x)+\frac{1}{7}\mathrm{sen}^7(x)+c\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}G &= \int \mathrm{tg}^3(x)\sec^4(x)dx\\ &= \int \mathrm{tg}^3(x)\sec^2(x)\sec^2(x)dx\end{aligned}$$

$$= \int \operatorname{tg}^3(x)\big(\operatorname{tg}^2(x)+1\big)\sec^2(x)dx$$

Fazendo a substituição $\quad u = \operatorname{tg}(x) \qquad du = \sec^2(x)dx$

$$\begin{aligned}
G &= \int u^3\big(u^2+1\big)du \\
&= \int u^5 + u^3\, du \\
&= \frac{u^6}{6} + \frac{u^4}{4} + c \\
&= \frac{1}{6}\operatorname{tg}^6(x) + \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4(x) + c
\end{aligned}$$

Solução alternativa

$$G_2 = \frac{1}{6\cos^6(x)} - \frac{1}{4\cos^4(x)} + c = \frac{\sec^6(x)}{6} - \frac{\sec^4(x)}{4} + c$$

c)

$$H = \int \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

Fazendo a substituição $x = 2\operatorname{sen}(\theta) \qquad dx = 2\cos(\theta)d\theta$

$$\begin{aligned}
H &= \int \frac{2^5\operatorname{sen}^5(\theta)}{\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2(\theta)}}2\cos(\theta)d\theta \\
&= 2^5\int \frac{\operatorname{sen}^5(\theta)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\theta)}}\cos(\theta)d\theta \\
&= 2^5\int \frac{\operatorname{sen}^5(\theta)}{\cos(\theta)}\cos(\theta)d\theta \\
&= 2^5\int \operatorname{sen}^5(\theta)d\theta \\
&= 2^5\int \big(\operatorname{sen}^2(\theta)\big)^2\operatorname{sen}(\theta)d\theta \\
&= 2^5\int \big(1-\cos^2(\theta)\big)^2\operatorname{sen}(\theta)d\theta
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $\quad u = \cos(\theta) \qquad du = -\operatorname{sen}(\theta)d\theta$

$$\begin{aligned}
H &= -2^5\int \big(1-u^2\big)^2 du \\
&= -2^5\int 1 - 2u^2 + u^4\, du \\
&= 2^5\int 2u^2 - u^4 - 1\, du \\
&= 2^5\left(\frac{2}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 - u\right) + c \\
&= 2^5\left(\frac{2}{3}\cos^3(\theta) - \frac{1}{5}\cos^5(\theta) - \cos(\theta)\right) + c
\end{aligned}$$

Para calcular $\cos(\theta)$ usamos que $\operatorname{sen}(\theta) = x/2$, portanto a hipotenusa é 2 e o cateto oposto é x

assim o cateto adjacente é $a = \sqrt{2^2 - x^2} = \sqrt{4 - x^2}$ e o cosseno é

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$

Voltando para a integral

$$H = 2^5 \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \right)^3 - \frac{1}{5} \left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \right)^5 - \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \right] + c$$

$$= 2^5 \left[\frac{2}{3 \cdot 2^3} \left(\sqrt{4-x^2} \right)^3 - \frac{1}{5 \cdot 2^5} \left(\sqrt{4-x^2} \right)^5 - \frac{1}{2} \sqrt{4-x^2} \right] + c$$

$$= \sqrt{4-x^2} \left[\frac{2^3}{3} \left(\sqrt{4-x^2} \right)^2 - \frac{1}{5} \left(\sqrt{4-x^2} \right)^4 - 2^4 \right] + c$$

$$= \sqrt{4-x^2} \left[\frac{8}{3} \left(4-x^2\right) - \frac{1}{5} \left(4-x^2\right)^2 - 16 \right] + c$$

$$= \sqrt{4-x^2} \left[\frac{32-8x^2}{3} - \frac{16-8x^2+x^4}{5} - 16 \right] + c$$

$$= \sqrt{4-x^2} \left[\frac{5 \cdot 32 - 5 \cdot 8x^2}{15} - \frac{3 \cdot 16 - 3 \cdot 8x^2 + 3x^4}{15} - \frac{16 \cdot 15}{15} \right] + c$$

$$= \frac{\sqrt{4-x^2}}{15} \left[16 \cdot 5 \cdot 2 - 16 \cdot 3 - 16 \cdot 5 \cdot 3 - 5 \cdot 8x^2 + 3 \cdot 8x^2 - 3x^4 \right] + c$$

$$= \frac{\sqrt{4-x^2}}{15} \left[-16 \cdot 5 - 16 \cdot 3 - 2 \cdot 8x^2 - 3x^4 \right] + c$$

$$= -\frac{\sqrt{4-x^2}}{15} \left[16 \cdot 8 + 2 \cdot 8x^2 + 3x^4 \right] + c$$

$$= -\frac{\sqrt{4-x^2}}{15} \left[128 + 16x^2 + 3x^4 \right] + c$$

4 [20] Calcule o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno da reta $x = -2$, da região contida entre as curvas

$$f(x) = \frac{1}{5x - x^2} \qquad y = 0 \qquad x = 1 \qquad x = 4$$

Volume por castas cilíndricas

$$V = \int_a^b 2\pi r(x) h(x) dx$$

$a = 1$

$b = 4$

$r = x + 2$

$h = \dfrac{1}{5x - x^2}$

portanto

$$V = 2\pi \int_1^4 \frac{x+2}{5x - x^2} dx$$

Calculando a integral indefinida

$$F = \int \frac{x+2}{5x-x^2} dx = \int \frac{x+2}{x(5-x)} dx$$

Por frações parciais temos

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x(5-x)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{5-x} \\ x+2 &= A(5-x) + Bx \\ &= (B-A)x + 5A \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes

$$[AB]B - A = 1{,}5A = 2$$

obtemos os valores $A = \dfrac{2}{5}$ e $B = \dfrac{7}{5}$ portanto

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{2}{5x} + \frac{7}{5(5-x)} dx \\ &= \frac{2}{5}\ln(x) - \frac{7}{5}\ln(5-x) + c \end{aligned}$$

Voltando ao volume temos

$$\begin{aligned} V &= 2\pi F(x)\Big|_1^4 \\ &= 2\pi \left[\frac{2}{5}\ln(x) - \frac{7}{5}\ln(5-x)\right]\Big|_1^4 \\ &= 2\pi \left[\left(\frac{2}{5}\ln(4) - \frac{7}{5}\ln(5-4)\right) - \left(\frac{2}{5}\ln(1) - \frac{7}{5}\ln(5-1)\right)\right] \\ &= 2\pi \left(\frac{2}{5}\ln(4) + \frac{7}{5}\ln(4)\right) \\ &= 2\pi \frac{9}{5}\ln(4) \\ &= \frac{18\pi}{5}\ln(4) \end{aligned}$$