Integrais e Séries – Prova 2 – Turma 5

03/10/2023

Nome ________________________________

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [20] Use **integral por partes** para calcular a integral $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$

Calculando a integral indefinida por partes $\displaystyle\int udv = uv - \int vdu$

Escolhendo

$$u = \ln(x) \qquad dv = \frac{dx}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}dx$$

temos

$$du = \frac{dx}{x} \qquad v = \frac{x^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{x}$$

então

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\, dx &= \ln(x)2\sqrt{x} - \int 2\sqrt{x}\frac{dx}{x} \\
&= 2\sqrt{x}\ln(x) - 2\int x^{1/2-1}dx \\
&= 2\sqrt{x}\ln(x) - 2\int x^{-1/2}dx \\
&= 2\sqrt{x}\ln(x) - 2\cdot 2\sqrt{x} + c \\
&= 2\sqrt{x}\left(\ln(x) - 2\right) + c
\end{aligned}$$

Calculando a integral definida

$$\begin{aligned}
\int_1^{e^2} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx &= 2\sqrt{x}\left(\ln(x) - 2\right)\Big|_1^{e^2} \\
&= \left[2\sqrt{e^2}\left(\ln\left(e^2\right) - 2\right)\right] - \left[2\sqrt{1}\left(\ln(1) - 2\right)\right] \\
&= [2e(2-2)] - [(2(-2))] \\
&= 4
\end{aligned}$$

2 [20] Use **substituição simples** para calcular a integral $\displaystyle\int \frac{a + bx^2}{\sqrt{3ax + bx^3}} dx$

Escolhendo a substituição

$$u = 3ax + bx^2 \qquad du = \left(3a + 3bx^2\right) dx = 3\left(a + bx^2\right) dx$$

portanto

$$\left(a+bx^2\right)dx = \frac{du}{3}$$

então

$$\begin{aligned}
\int \frac{a+bx^2}{\sqrt{3ax+bx^3}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{3ax+bx^3}}\left(a+bx^2\right)dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{du}{3} \\
&= \frac{1}{3}\int u^{-1/2}du \\
&= \frac{1}{3}\frac{u^{1/2}}{1/2}+c \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{u}+c \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{3ax+bx^2}+c
\end{aligned}$$

3 [40] Escolha dois itens e calcule as primitivas das funções correspondentes

a) ☐ $f(x) = \cos^2(x)\operatorname{sen}(2x)$

b) ☐ $g(x) = \operatorname{tg}^4(x)\sec^6(x)$

c) ☐ $h(x) = \dfrac{x^5}{\sqrt{4-x^2}}$

Marque sua escolha nas caixas, caso contrário, serão corrigidos dois itens aleatoriamente.

a)

$$\begin{aligned}
F &= \int f(x)dx \\
&= \int \cos^2(x)\operatorname{sen}(2x)dx \\
&= \int \cos^2(x)2\operatorname{sen}(x)\cos(x)dx \\
&= 2\int \cos^3(x)\operatorname{sen}(x)dx
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $\qquad u = \cos(x) \qquad du = -\operatorname{sen}(x)dx$

$$\begin{aligned}
F &= -2\int u^3du \\
&= -2\frac{u^4}{4}+c \\
&= -\frac{1}{2}\cos^4(x)+c
\end{aligned}$$

b)

$$G = \int \operatorname{tg}^4(x)\sec^6(x)dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \operatorname{tg}^4(x)\sec^4(x)\sec^2(x)dx \\
&= \int \operatorname{tg}^4(x)\big(\sec^2(x)\big)^2\sec^2(x)dx \\
&= \int \operatorname{tg}^4(x)\big(\operatorname{tg}^2(x)+1\big)^2\sec^2(x)dx
\end{aligned}
$$

Fazendo a substituição $\quad u = \operatorname{tg}(x) \qquad du = \sec^2(x)dx$

$$
\begin{aligned}
G &= \int u^4\big(u^2+1\big)^2 du \\
&= \int u^4\big(u^4+2u^2+1\big)du \\
&= \int u^8+2u^6+u^4\,du \\
&= \frac{u^9}{9}+2\frac{u^7}{7}+\frac{u^5}{5}+c \\
&= \frac{1}{9}\operatorname{tg}^9(x)+\frac{2}{7}\operatorname{tg}^7(x)+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5(x)+c
\end{aligned}
$$

c)

$$
H = \int \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}}dx
$$

Fazendo a substituição $x = 2\operatorname{sen}(\theta) \qquad dx = 2\cos(\theta)d\theta$

$$
\begin{aligned}
H &= \int \frac{2^5\operatorname{sen}^5(\theta)}{\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2(\theta)}}2\cos(\theta)d\theta \\
&= 2^5\int \frac{\operatorname{sen}^5(\theta)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\theta)}}\cos(\theta)d\theta \\
&= 2^5\int \frac{\operatorname{sen}^5(\theta)}{\cos(\theta)}\cos(\theta)d\theta \\
&= 2^5\int \operatorname{sen}^5(\theta)d\theta \\
&= 2^5\int \big(\operatorname{sen}^2(\theta)\big)^2\operatorname{sen}(\theta)d\theta \\
&= 2^5\int \big(1-\cos^2(\theta)\big)^2\operatorname{sen}(\theta)d\theta
\end{aligned}
$$

Fazendo a substituição $\quad u = \cos(\theta) \qquad du = -\operatorname{sen}(\theta)d\theta$

$$
\begin{aligned}
H &= -2^5\int \big(1-u^2\big)^2du \\
&= -2^5\int 1-2u^2+u^4\,du \\
&= 2^5\int 2u^2-u^4-1\,du \\
&= 2^5\left(\frac{2}{3}u^3-\frac{1}{5}u^5-u\right)+c \\
&= 2^5\left(\frac{2}{3}\cos^3(\theta)-\frac{1}{5}\cos^5(\theta)-\cos(\theta)\right)+c
\end{aligned}
$$

Para calcular $\cos(\theta)$ usamos que $\text{sen}(\theta) = {}^{x}/_{2}$, portanto a hipotenusa é 2 e o cateto oposto é x assim o cateto adjacente é $a = \sqrt{2^2 - x^2} = \sqrt{4 - x^2}$ e o cosseno é

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2}$$

Voltando para a integral

$$\begin{aligned}
H &= 2^5 \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} \right)^3 - \frac{1}{5} \left(\frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} \right)^5 - \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} \right] + c \\
&= 2^5 \left[\frac{2}{3 \cdot 2^3} \left(\sqrt{4 - x^2} \right)^3 - \frac{1}{5 \cdot 2^5} \left(\sqrt{4 - x^2} \right)^5 - \frac{1}{2} \sqrt{4 - x^2} \right] + c \\
&= \sqrt{4 - x^2} \left[\frac{2^3}{3} \left(\sqrt{4 - x^2} \right)^2 - \frac{1}{5} \left(\sqrt{4 - x^2} \right)^4 - 2^4 \right] + c \\
&= \sqrt{4 - x^2} \left[\frac{8}{3} \left(4 - x^2 \right) - \frac{1}{5} \left(4 - x^2 \right)^2 - 16 \right] + c \\
&= \sqrt{4 - x^2} \left[\frac{32 - 8x^2}{3} - \frac{16 - 8x^2 + x^4}{5} - 16 \right] + c \\
&= \sqrt{4 - x^2} \left[\frac{5 \cdot 32 - 5 \cdot 8x^2}{15} - \frac{3 \cdot 16 - 3 \cdot 8x^2 + 3x^4}{15} - \frac{16 \cdot 15}{15} \right] + c \\
&= \frac{\sqrt{4 - x^2}}{15} \left[16 \cdot 5 \cdot 2 - 16 \cdot 3 - 16 \cdot 5 \cdot 3 - 5 \cdot 8x^2 + 3 \cdot 8x^2 - 3x^4 \right] + c \\
&= \frac{\sqrt{4 - x^2}}{15} \left[-16 \cdot 5 - 16 \cdot 3 - 2 \cdot 8x^2 - 3x^4 \right] + c \\
&= -\frac{\sqrt{4 - x^2}}{15} \left[16 \cdot 8 + 2 \cdot 8x^2 + 3x^4 \right] + c \\
&= -\frac{\sqrt{4 - x^2}}{15} \left[128 + 16x^2 + 3x^4 \right] + c
\end{aligned}$$

4 [20] Calcule o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno da reta $x = -1$, da região contida entre as curvas

$$f(x) = \frac{1}{4x - x^2} \qquad y = 0 \qquad x = 1 \qquad x = 3$$

Volume por castas cilíndricas

$$V = \int_a^b 2\pi r(x) h(x) dx$$

$a = 1$

$b = 3$

$r = x + 1$

$$h = \frac{1}{4x - x^2}$$

portanto

$$V = 2\pi \int_1^3 \frac{x+1}{4x-x^2}dx$$

Calculando a integral indefinida

$$F = \int \frac{x+1}{4x-x^2}dx = \int \frac{x+1}{x(4-x)}dx$$

Por frações parciais temos

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{x(4-x)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{4-x}\\ x+1 &= A(4-x) + Bx\\ &= (B-A)x + 4A\end{aligned}$$

Igualando os coeficientes

$$\begin{cases} -A + B = 1 \\ 4A \qquad = 1 \end{cases}$$

obtemos os valores $A = \dfrac{1}{4}$ e $B = \dfrac{5}{4}$ portanto

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{1}{4x} + \frac{5}{4(4-x)}dx \\ &= \frac{1}{4}\ln(x) - \frac{5}{4}\ln(4-x) + c \end{aligned}$$

Voltando ao volume temos

$$\begin{aligned} V &= 2\pi F(x)\Big|_1^3 \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{4}\ln(x) - \frac{5}{4}\ln(4-x)\right]\Bigg|_1^3 \\ &= 2\pi \left[\left(\frac{1}{4}\ln(3) - \frac{5}{4}\ln(4-3)\right) - \left(\frac{1}{4}\ln(1) - \frac{5}{4}\ln(4-1)\right)\right] \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{4}\ln(3) + \frac{5}{4}\ln(3)\right) \\ &= 2\pi \frac{6}{4}\ln(3) \\ &= 3\pi \ln(3) \end{aligned}$$