Integrais e Séries – Prova 3 – Turma 4

09/11/2023

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [25] Use o teste da integral para verificar se a soma da série existe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(1+n)^2}$$

Não se esqueça de verificar que as condições do teste são satisfeitas.

Vamos usar a função real

$$f(x) = \frac{5}{(1+x)^2}$$

Precisamos verificar as três condições do teste

i) $f(x) > 0$ em $[1, \infty)$

Como $(1+x)^2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então $f(x) > 0$

ii) $f(x)$ é contínua em $[1, \infty)$

Como $(1+x)^2 > 0$ a função $f(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$

iii) $f(x)$ é decrescente em $[1, \infty)$

A derivada de $f(x)$ é

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(5)'(1+x)^2 - 5\left[(1+x)^2\right]'}{(1+x)^4} \\ &= \frac{-5 \times 2(1+x)\,1}{(1+x)^4} \\ &= \frac{-10(1+x)}{(1+x)^4} \\ &= \frac{-10}{(1+x)^3} \end{aligned}$$

portanto $f'(x) < 0$ para $x > -1$, assim f é decrescente no intervalo $[1, \infty)$

Calculando a primitiva de f

$$F(x) = \int \frac{5}{(1+x)^2} dx$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$u = 1 + x \qquad du = dx$$

$$F(x) = \int \frac{5}{(1+x)^2} dx = 5 \int \frac{du}{u^2} = 5 \int u^{-2} du = 5\frac{u^{-1}}{-1} + c = \frac{-5}{u} + c = \frac{-5}{1+x} + c$$

Calculando a integral imprópria

$$A = \int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} F(x)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-5}{1+b} - \frac{-5}{1+1}\right) = \frac{5}{2}$$

Como a integral converge a série também converge e portanto sua soma existe.

2 [25] Calcule o limite de $\left(\dfrac{\cos(n)+1}{\ln(n)}\right)_{n=2}^{\infty}$

Queremos calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)+1}{\ln(n)}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n)$ não existe, não podemos calcular o limite de cada termo separadamente, portanto, vamos usar o Teorema do Confronto.

$$-1 \le \cos(n) \le 1$$

$$0 \le \cos(n) + 1 \le 2$$

$$\frac{0}{\ln(n)} \le \frac{\cos(n)+1}{\ln(n)} \le \frac{2}{\ln(n)}$$

$$0 \le \frac{\cos(n)+1}{\ln(n)} \le \frac{2}{\ln(n)}$$

A penúltima desigualdade vale, pois, $\ln(n) > 0$ para todo $n \ge 2$.
Como $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{\ln(n)} = 0$, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)+1}{\ln(n)} = 0$$

3 [25] Verifique se a série converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3+9^n}$$

Como todos os termos são positivos, podemos usar o teste da comparação no limite.
Escolhemos $b_n = 1/3^n$, que são os termos de uma série geométrica convergente, pois $|r| = 1/3 < 1$.

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n}{3+9^n}}{\frac{1}{3^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3+9^n}\, 3^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{9^n}{3+9^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3/9^n + 1}$$

$$= 1$$

Como $c > 0$ e finito, o teste da comparação no limite diz que ou ambas as séries convergem ou ambas divergem. Como a soma de b_n converge, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3+9^n}$$

também converge.

4 [25] Considerando a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^{n-1}}$$

a) Prove que a série converge

b) Calcule a soma da série

c) Estime o erro cometido ao aproximar a soma por S_{100}

a) Essa é uma série geométrica com $\alpha = -2$ e $r = \dfrac{-2}{3}$, pois,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)(-2)^{n-1}}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-2)\left(\frac{-2}{3}\right)^{n-1}$$

Como $|r| = \dfrac{2}{3} < 1$ a série é convergente.

b) A soma da série geométrica é

$$S = \frac{\alpha}{1-r} = \frac{-2}{1-\left(\frac{-2}{3}\right)} = \frac{-2}{\frac{3}{3}+\frac{2}{3}} = \frac{-2}{\frac{5}{3}} = -2\frac{3}{5} = \frac{-6}{5}$$

c) Além de ser uma série geométrica essa série também é alternada, então

$$R_{100} < |a_{101}|$$

como $|a_n| = \dfrac{2^n}{3^{n-1}}$, portanto

$$R_{100} < \frac{2^{101}}{3^{100}} \approx 4{,}9193 \times 10^{-18}$$