Integrais e Séries – Prova 3 – Turma 5 09/11/2023

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [25] Considerando a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^2+5n+6}$$

a) Calcule a soma da série

b) Calcule o valor do erro ao aproximar a soma por S_{100}

a) Vamos verificar que a série é telescópica.

Calculando as raízes de $x^2+5x+6=0$, temos

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4\times 1\times 6 = 25-24 = 1$$

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5\pm 1}{2} \qquad x_1 = \frac{-6}{2} = -3 \qquad x_2 = \frac{-4}{2} = -2$$

Portanto

$$x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$$

e podemos escrever o termo geral da série como

$$a_n = \frac{5}{n^2+5n+6} = \frac{5}{(n+2)(n+3)}$$

Usando frações parciais

$$\frac{5}{(n+2)(n+3)} = \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n+3} = \frac{A(n+3)+B(n+2)}{(n+2)(n+3)}$$

Portanto

$$5 = A(n+3)+B(n+2) = An+3A+Bn+2B = (A+B)n+(3A+2B)$$

$$[AB]A+B=0, 3A+2B=5$$

$$B=-A \qquad 3A-2A=5 \qquad A=5 \qquad B=-5$$

Assim

$$a_n = \frac{5}{n+2} - \frac{5}{n+3}$$

O que comprova que a série é telescópica. Consequentemente, as somas parciais são

$$S_n = \frac{5}{3} - \frac{5}{n+3}$$

Calculando o limite

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{3} - \frac{5}{n+3} = \frac{5}{3}$$

b)

$$R_{100} = S - S_{100} = \frac{5}{3} - \left(\frac{5}{3} - \frac{5}{100+3}\right) = \frac{5}{103}$$

2 [25] Calcule o limite da sequência $a_n = \begin{cases} \dfrac{n}{\pi - n^2}, & n \text{ par} \\ 2^{-n}, & n \text{ ímpar} \end{cases}$

Observando que $\dfrac{n}{\pi - n^2} < 0$ para todo $n > 1$ e 2^{-n} é sempre positivo, temos que, para $n > 1$,

$$\frac{n}{\pi - n^2} \;\leq\; a_n \;\leq\; 2^{-n}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\pi - n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{\pi/n - 1} = 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

o **Teorema do Confronto** garante que $\lim\limits_{n\to 0} a_n = 0$

3 [25] Verifique se a série converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(n)}{n^\pi}$$

Como os termos são não-negativos podemos usar o teste da comparação. Observando que $\operatorname{sen}^2(n) \leq 1$ temos que

$$a_n = \frac{\operatorname{sen}^2(n)}{n^\pi} \leq \frac{1}{n^\pi}$$

Como $b_n = \dfrac{1}{n^\pi}$ são os termos de uma p-série convergente ($p = \pi > 1$) o teste da comparação garante que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}^2(n)}{n^{\pi}}$$

converge.

4 [25] Use o teste da integral para verificar se a soma da série existe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$$

Não se esqueça de verificar que as condições do teste são satisfeitas.

Vamos usar a função real

$$f(x) = x e^{-x^2}$$

Precisamos verificar as três condições do teste

i) $f(x) > 0$ em $[1, \infty)$

Como a exponencial é sempre positiva e $x \geq 1$ temos que $f(x) > 0$

ii) $f(x)$ é contínua em $[1, \infty)$

Como a exponencial é contínua, $f(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$

iii) $f(x)$ é decrescente em $[1, \infty)$

A derivada de $f(x)$ é

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)' e^{-x^2} + x \left(e^{-x^2} \right)' \\ &= e^{-x^2} + x e^{-x^2} \left(-x^2 \right)' \\ &= e^{-x^2} + x e^{-x^2} (-2x) \\ &= e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} \\ &= e^{-x^2} \left(1 - 2x^2 \right) \end{aligned}$$

portanto $f'(x) < 0$ para $x > 1$, assim f é decrescente no intervalo $[1, \infty)$

Calculando agora a primitiva de f

$$F(x) = \int x e^{-x^2} dx$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$u = -x^2 \qquad du = -2x dx \qquad dx = \frac{du}{-2x}$$

$$F(x) = \int x e^{-x^2} dx = \int x e^{u} \frac{du}{-2x} = \frac{-1}{2} \int e^{u} du = \frac{-e^{u}}{2} + c = \frac{-e^{-x^2}}{2} + c$$

Calculando a integral imprópria

$$A = \int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} F(x)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-e^{-b^2}}{2} - \frac{-e^{-1^2}}{2} \right) = \frac{e^{-1}}{2} = \frac{1}{2e}$$

Como a integral converge a série também converge e portanto sua soma existe.