INTEGRAIS E SÉRIES – PROVA 4 – TURMA 5 12/12/2023

GABARITO

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

1 [30] Calcule a Série de Taylor da função $f(x) = \displaystyle\int e^{-x^2}dx$

Sabemos que a Série de Taylor da função exponencial é

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Primeiro calculamos a Série de Taylor da função

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-x^2\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$$

Agora integramos

$$\begin{aligned} f(x) &= \int e^{-x^2}dx \\ &= \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}\,dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\int x^{2n}dx \\ &= C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \end{aligned}$$

2 [40] Seja $f(x) = \ln(x+1)$

a) [12] Encontre um padrão para $f^{(n)}(x)$

b) [14] Usando o padrão do item anterior, encontre a Serie de Taylor de $f(x)$, centrada em zero

c) [14] Obtenha o raio de convergência da série de potências

a) Calculando as primeiras derivadas

$$f^{(0)}(x) = \ln(x+1)$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{d}{dx}\ln(x+1) = \frac{1}{x+1}(x+1)' = (x+1)^{-1}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{d^2}{dx^2}\ln(x+1) = -(x+1)^{-2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{d^3}{dx^3}\ln(x+1) = \quad 2\,(x+1)^{-3}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{d^4}{dx^4}\ln(x+1) = -2\cdot 3\,(x+1)^{-4}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{d^5}{dx^5}\ln(x+1) = \quad 2\cdot 3\cdot 4\,(x+1)^{-5}$$

Vemos que, para $\boldsymbol{n \geq 1}$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\ln(x+1) = (-1)^{n+1}(n-1)!(x+1)^{-n} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x+1)^n}$$

b) O primeiro coeficiente, $n = 0$, da Série de Taylor é

$$c_0 = \frac{\ln(0+1)}{0!} = \frac{0}{1} = 0$$

portanto, a série começa com $n = 1$. Os demais coeficientes, $n \geq 1$, são

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(0+1)^n n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Montando a série temos

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

c) Aplicando o Teste da Razão temos

$$\begin{aligned}
\rho &= \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{n+1}\right| \left|\frac{n}{(-1)^{n+1}x^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{n+1}\frac{n}{|x|^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}|x| \\
&= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \\
&= |x|
\end{aligned}$$

Impondo a condição de convergência $\rho < 1$ temos

$$\rho = |x| < 1$$

portanto o raio de convergência é $R = 1$

3 [30] Prove que a série de Maclaurin de e^x converge para a própria função, para todo $x \in \mathbb{R}$

Pelo **Teorema de Taylor**, sabemos que o erro cometido ao aproximarmos e^x pelo seu polinômio de Taylor centrado em zero de grau n é

$$R_n(x) = \frac{\exp^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, x^{n+1}$$

para algum ξ entre zero e x. Como $\exp^{(k)}(x) = e^x$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\left|\exp^{(k)}(t)\right| \leq e^{|x|}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e $|t| \leq |x|$. Portanto, para todo $x \in \mathbb{R}$

$$|R_n(x)| = \frac{\left|\exp^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}\left|x^{n+1}\right| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}\left|x^{n+1}\right|$$

Calculando o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}\left|x^{n+1}\right| = e^{|x|}\left|x^{n+1}\right| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!} = e^{|x|}\left|x^{n+1}\right| \cdot 0 = 0$$

podemos usar o **Teorema do Confronto** para mostrar que $R_n(x)$ vai para zero, quando n vai para o infinito. Portanto, a série converge para a função.