Integrais e Séries – Prova Substitutiva – Turma 5 14/12/2023

Gabarito

1. Não é permitido o uso de celulares, calculadoras ou dispositivos eletrônicos!
2. A avaliação é individual e não é permitida consulta!
3. Não utilize caneta vermelha ou corretivo!
4. Todas as respostas devem ser devidamente justificadas!
5. Não pule passagens e use a notação matemática correta!

Substitui a prova __________

Os exercícios 1 e 2 valem 30 para quem perdeu a prova 1 ou 2
O exercício 3 vale 40 para quem perdeu a prova 3
O exercício 4 vale 40 para quem perdeu a prova 4

1 [20] Calcule a integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$. *Atenção ao intervalo de integração.*

Calculando a primitiva $F(x) = \displaystyle\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$ por integral por partes

$$u = \ln(x) \qquad dv = \frac{dx}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}dx$$

$$du = \frac{dx}{x} \qquad v = \frac{x^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{x}$$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx \\
&= \ln(x)2\sqrt{x} - \int 2\sqrt{x}\frac{dx}{x} \\
&= 2\ln(x)\sqrt{x} - 2\int x^{1/2-1}dx \\
&= 2\ln(x)\sqrt{x} - 2\int x^{-1/2}dx \\
&= 2\ln(x)\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C \\
&= 2\sqrt{x}\big(\ln(x) - 1\big) + C
\end{aligned}$$

Para calcular a integral definida precisamos observar que temos uma assintota vertical em $x = 0$ portanto essa é uma integral imprópria

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$$

$$= \lim_{t \to 0} \int_t^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \lim_{t \to 0} \left[2\sqrt{x}\big(\ln(x) - 1\big)\Big|_t^1 \right]$$

$$= \lim_{t \to 0} \left[2\sqrt{1}\big(\ln(1) - 1\big) - 2\sqrt{t}\big(\ln(t) - 1\big) \right]$$

$$= 2(0 - 1) - 2 \lim_{t \to 0} \left[\sqrt{t}\big(\ln(t) - 1\big) \right]$$

$$= -2 - 2 \lim_{t \to 0} \left[\sqrt{t}\big(\ln(t) - 1\big) \right]$$

Precisamos calcular o limite

$$L = \lim_{t \to 0} \sqrt{t}\big(\ln(t) - 1\big)$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\ln(t) - 1}{t^{-1/2}} \qquad \text{usando l'Hopital}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^{-1}}{-1/2 t^{-3/2}}$$

$$= \lim_{t \to 0} -2t^{3/2 - 1}$$

$$= -2 \lim_{t \to 0} t^{1/2}$$

$$= -2 \lim_{t \to 0} \sqrt{t} = 0$$

Portando

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx = -2$$

2 [20] Encontre o volume do sólido obtido pela rotação, em torno no eixo y, da região contida entre as curvas $y = x^3$, $y = 8$ e $x = 0$.

Integrando por seções transversais em y temos

$$V = \int_a^b A(y) dy$$

onde $a = 0$, $b = 8$ e

$$A(y) = \pi r^2 = \pi \left(x^{1/3} \right)^2 = \pi x^{2/3}$$

Assim

$$V = \int_0^8 \pi x^{2/3} dy$$

$$= \pi \int_0^8 x^{2/3} dy$$

$$= \pi \frac{x^{5/3}}{5/3}\bigg|_0^8$$

$$= \frac{3\pi}{5}\left(8^{5/3} - 0^{5/3}\right)$$

$$= \frac{3\pi 2^5}{5}$$

$$= \frac{96\pi}{5}$$

3 [20] Analise a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$

Vamos comparar a série com a série geométrica convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Primeiro verificamos que

$$\frac{1}{2+3^n} < \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Portanto, a série converge pelo teste da comparação.

4 [20] Sabendo que $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$

a) Construa o Polinômio de Taylor de grau n centrado em 2 da função f

b) Determine o intervalo de convergência da Série de Taylor

c) Determine o grau necessário para que a diferença entre o polinômio e a função seja menor do que 10^{-6} no intervalo $(2, 3)$

a) O Polinômio de grau n é

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k$$

como

$$f^{(k)}(2) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} = \frac{(-1)^k k!}{2^{k+1}}$$

temos

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(2)}{k!}\,(x-2)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k k!}{2^{k+1}}\,\frac{1}{k!}\,(x-2)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}\,(x-2)^k
\end{aligned}
$$

b) Podemos escrever a Série de Taylor omo uma série geométrica

$$
T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}\,(x-2)^k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2-x}{2}\right)^k
$$

que converge quando

$$
\begin{aligned}
|r| = \left|\frac{2-x}{2}\right| &< 1 \\
|2-x| &< 2 \\
-2 < 2-x &< 2 \\
-4 < -x &< 0 \\
0 < x &< 4
\end{aligned}
$$

Portanto o intervalo de convergência é $(0,4)$

c) O erro ao aproximar a função pelo Polinômio de Taylor de grau n é dada pelo Teorema de Taylor

$$
R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-2)^{n+1}
$$

para algum ξ entre 2 e x. Neste caso particular

$$
R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{\xi^{n+2}}\,\frac{1}{(n+1)!}(x-2)^{n+1} = (-1)^{n+1}\frac{(x-2)^{n+1}}{\xi^{n+2}}
$$

portanto,

$$
|R_n(x)| = \frac{|x-2|^{n+1}}{|\xi|^{n+2}}
$$

Como $2 \le \xi \le x < 3$, temos

$$
\frac{1}{|\xi|^{n+2}} = \frac{1}{\xi^{n+2}} \le \frac{1}{2^{n+2}}
$$

além disso,

$$
|x-2|^{n+1} = (x-2)^{n+1} \le 1^{n+1} = 1
$$

Assim

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n+2}}$$

Para garantir que o erro seja menor do que a tolerância impomos

$$\frac{1}{2^{n+2}} < 10^{-6}$$

$$2^{n+2} > 10^6$$

$$(n+2)\ln(2) > 6\ln(10)$$

$$n+2 > 6\,\frac{\ln(10)}{\ln(2)}$$

$$n > 6\,\frac{\ln(10)}{\ln(2)} - 2 \approx 17{,}9$$