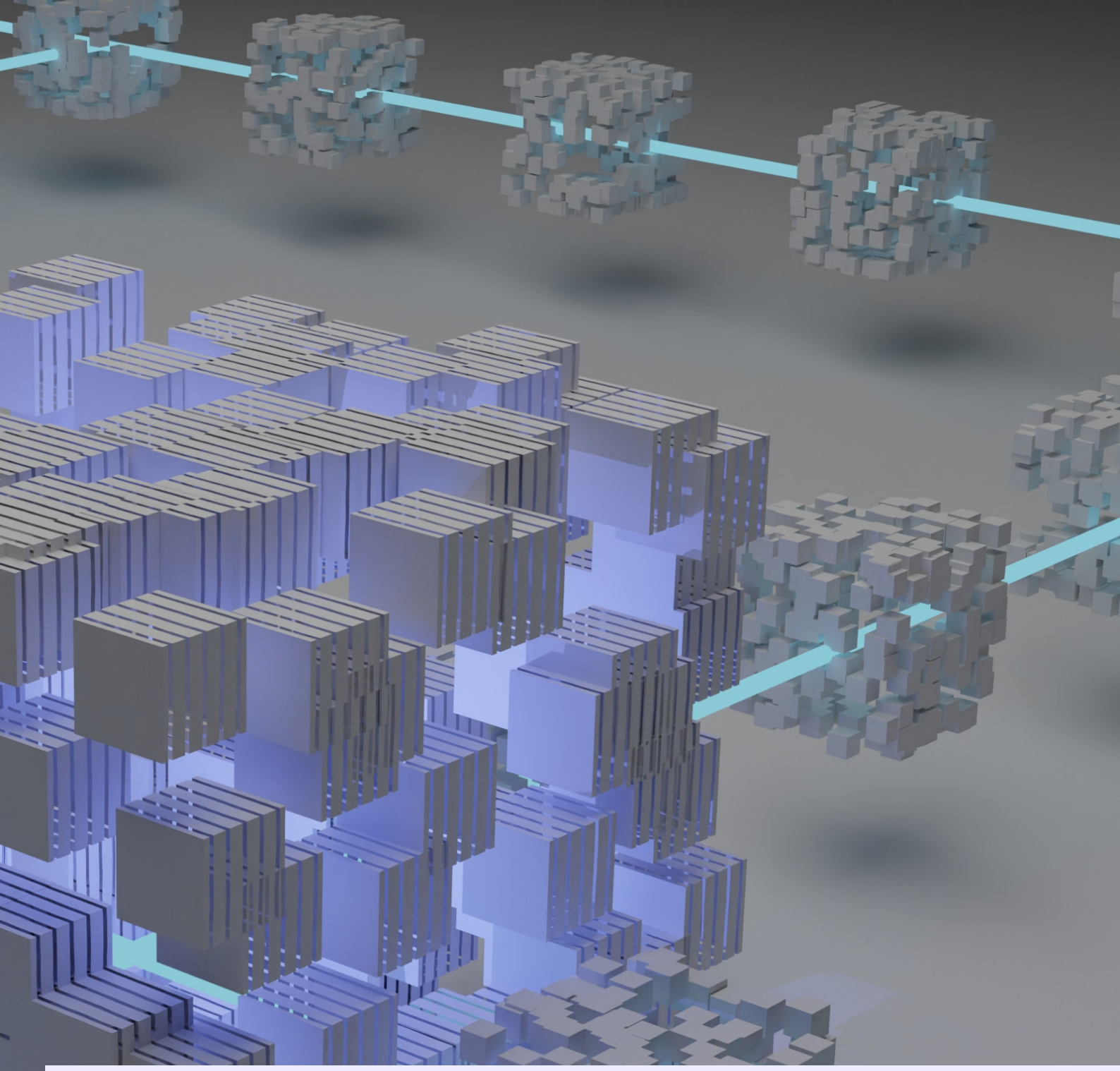


A Matemática do Ótimo:

Introdução à Programação Dinâmica

Joaquim Lopes Júnior
Luis A. D'Afonseca

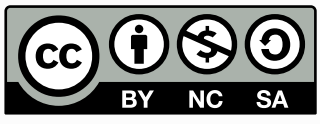
A Matemática do Ótimo: Introdução à Programação Dinâmica

Joaquim Lopes Júnior
Luis A. D'Afonseca

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET-MG
27 de agosto 2026

Esta apostila é produto do mestrado de Joaquim Lopes Júnior defendida em 2026 no Profmat do Cefet-MG O texto completo da dissertação pode ser baixado

Arte da capa: Imagem de Shubham Dhage baixada de Unsplash



Esta obra tem a licença Creative Commons "Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 4.0 Internacional".

Prefácio

Esta apostila nasce diretamente da minha prática como professor ao longo de mais de duas décadas em sala de aula, das inquietações que surgiram durante esse período ensinando matemática para várias gerações de estudantes do ensino básico. Em muitos momentos, percebi que os estudantes são naturalmente curiosos quando a matemática faz sentido para a vida do aluno e quando vai além do cálculo mecânico, quando ela responde a perguntas do tipo *qual é a melhor opção?*, *qual caminho é mais curto?*, *como gastar menos tempo ou recurso?*. No entanto, essas perguntas raramente aparecem de forma estruturada no ensino básico. A otimização, apesar de estar presente em diversos conteúdos tradicionais, costuma aparecer de maneira fragmentada ou excessivamente técnica. Esta apostila é uma tentativa de organizar essas ideias.

O desenvolvimento deste material também está ligado ao meu percurso acadêmico, em especial durante o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Lá tive contato com ferramentas que conversam diretamente com essas situações. Entre elas, a programação dinâmica se destacou por permitir resolver problemas de otimização de modo mais simples, eficiente e baseado em comparação de estratégias. Percebi ali uma oportunidade de aproximar a matemática da realidade dos estudantes.

A apostila foi pensada para ser utilizada no ensino médio, por professores que desejam apresentar algo diferente dos livros tradicionais. Trata-se de um convite para olhar conteúdos conhecidos como funções, sequências, máximos e mínimos, grafos, caminho mínimo e programação dinâmica sobre uma nova perspectiva, a da tomada de decisões ótimas. O leitor encontrará aqui uma abordagem gradual, acessível e conceitualmente sólida, pensada para aproximar a matemática da realidade dos estudantes do ensino médio e da prática docente.

O professor que abrir esta apostila não precisa de formação prévia, basta dominar os conteúdos básicos da matemática escolar e ter curiosidade para explorá-los de

uma forma diferente. O estudante, por sua vez, precisa apenas do que já é esperado no ensino médio, como funções, operações algébricas e interpretação de tabelas e gráficos, com esse domínio da matemática básica, o estudante terá facilidade em compreender funções recursivas, grafos, caminho mínimo e programação dinâmica, conteúdos que na maioria das vezes não são abordados no ensino médio, ou têm uma abordagem superficial. A partir daí, ambos irão aprender a enxergar problemas sob a ótica da eficiência, da comparação de alternativas e da construção de estratégias, habilidades cada vez mais valorizadas dentro e fora da escola.

Ao longo da apostila, o leitor aprenderá o que significa otimizar uma situação, como identificar variáveis importantes, como modelar problemas reais de forma matemática e como usar ideias simples, como recursividade e decomposição em etapas, para resolver problemas do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM que aparentemente são complexos. Tudo isso feito com exemplos simples, linguagem acessível e na medida do possível, com situações concretas.

A programação dinâmica é especialmente fascinante porque nos ensina a pensar melhor. Ela não se limita a encontrar respostas, mas a justificar escolhas. Ensina que nem sempre existe apenas uma solução correta, mas que algumas soluções são melhores do que outras dependendo do critério adotado. Esse tipo de raciocínio desenvolve autonomia, senso crítico e capacidade de argumentação, competências centrais da educação matemática.

Espero que esta apostila sirva como uma ferramenta de apoio ao professor, como inspiração para novas práticas em sala de aula e como um convite ao estudante para enxergar a matemática como algo vivo, útil e intelectualmente estimulante. Mais do que apresentar técnicas, esta apostila propõe uma mudança de olhar para a matemática, como uma ciência de escolhas bem feitas.

Sumário

1 Introdução **1**

2 Funções Recursivas **5**

2.1 Introdução 5

2.2 Definição 6

2.3 Progressão Aritmética 8

2.4 Progressão Geométrica 11

2.5 Fatorial 13

2.6 Sequência de Fibonacci 15

2.7 Sequência de Collatz 22

2.8 Uma Breve História das Funções Recursivas 25

2.9 Exercícios 27

3 Máximos e Mínimos **28**

3.1 Introdução 28

3.2 Problemas de Otimização 29

3.3 Máximos e Mínimos da Parábola 33

3.4 Máximos e Mínimos da Função Cúbica 40

3.5 Máximo da Sequência de Collatz 42

3.6 Exercícios 47

4 Grafos e Caminhos Mínimos **49**

4.1 Introdução 49

4.2 Grafo 50

4.3 Caminho Mínimo 56

4.4 Uma Breve História da Teoria de Grafos 62

4.5 Exercícios 63

5 Programação Dinâmica **65**

5.1 Introdução 65

5.2 Definição 66

5.3 Uma Breve História da Programação Dinâmica 88

5.4 Exercícios 89

6 Problema da Mochila **90**

6.1 Introdução 90

6.2 Recuperação da solução ótima 93

6.3 Exemplos 94

6.4 Exercícios 108

7 Problema da Mochila com Repetição **109**

7.1 Introdução 109

7.2 Recuperação da solução ótima 112

7.3 Exemplos 113

7.4 Exercícios 127

8 Problema de Reposição **129**

8.1 Introdução 129

8.2 Recuperação a solução ótima 131

8.3 Exemplos 131

8.4 Exercícios 147

9 Considerações Finais 149

Respostas 151

Referências 166

Índice Remissivo 167

1

Introdução

Fazer escolhas faz parte da vida de qualquer pessoa, e a Matemática, por meio de seus métodos, pode ser utilizada para tornar esse processo de tomada de decisão mais objetivo e, acima de tudo, mais assertivo. A compreensão de conceitos matemáticos, associada à capacidade de interpretar situações, elaborar estratégias e tomar decisões fundamentadas, constitui elemento essencial da formação científica e cidadã. Nesse contexto, a Matemática desempenha papel central na formação dos estudantes da educação básica, tanto por sua ampla aplicação na sociedade quanto por sua contribuição ao desenvolvimento do raciocínio lógico, crítico e investigativo. Essa perspectiva, que reconhece a Matemática como instrumento para a leitura, a compreensão e a transformação da realidade, encontra respaldo explícito na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que destaca:

> "O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da educação básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais." (BRASIL, 2018, p. 265)

É a partir desse entendimento que a presente apostila foi concebida. A obra tem como finalidade introduzir e desenvolver, de forma gradual, conceitual e estruturada, os fundamentos da programação dinâmica, compreendida não apenas como um método algorítmico, mas como uma estratégia matemática de resolução de problemas baseada na recursividade, na decomposição em etapas e na busca por soluções ótimas. Ao adotar essa abordagem, a apostila procura ampliar o repertório matemático tradicionalmente explorado no ensino médio, aproximando-o de temas da Matemática

Discreta e da Pesquisa Operacional, sem perder o rigor conceitual nem a acessibilidade pedagógica.

Nessa perspectiva, a proposta pedagógica adotada dialoga diretamente com as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), ao valorizar a resolução de problemas, a investigação de padrões, o uso articulado de diferentes registros de representação matemática e a construção de argumentos. Esses aspectos são explorados ao longo da apostila por meio do estudo de sequências, funções, grafos e problemas de otimização, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio matemático e da autonomia intelectual do estudante.

A obra também enfatiza a importância de metodologias centradas na elaboração de estratégias, na argumentação e na análise crítica de situações-problema, bem como na articulação entre o conteúdo matemático escolar e os contextos da vida cotidiana, encontrando respaldo nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), que afirmam:

> "O ensino de Matemática será eficiente quando as metodologias abordadas priorizarem a elaboração de estratégias pelo educando, favorecendo a argumentação, a criatividade e a capacidade de questionar e analisar as mais diversas situações." (BRASIL, 1997)

No que se refere aos conhecimentos prévios necessários, a apostila pressupõe apenas conteúdos matemáticos básicos do ensino fundamental e médio, tais como operações com números reais, noções elementares de funções, sequências numéricas e interpretação de gráficos e tabelas. Não se exige conhecimento prévio em grafos, caminho mínimo, sequência de Collatz ou programação dinâmica, uma vez que esses conceitos são introduzidos a partir de ideias matemáticas familiares, desenvolvidas com progressão conceitual cuidadosamente planejada.

Considerando esse perfil, a obra foi planejada prioritariamente para estudantes dos anos finais do Ensino Médio, podendo também ser utilizada em cursos de Licenciatura em Matemática ou em disciplinas introdutórias de Matemática Discreta. Sua estrutura permite flexibilidade didática, possibilitando ao professor conduzir o curso de forma sequencial ou selecionar capítulos conforme os objetivos pedagógicos e o contexto educacional.

No âmbito da prática docente, recomenda-se que a condução das aulas privilegie a discussão coletiva de estratégias, a comparação entre diferentes soluções e a

valorização do processo de raciocínio do estudante. Os exercícios propostos ao final de cada capítulo foram elaborados com o intuito de promover a reflexão, a consolidação conceitual e o desenvolvimento da autonomia intelectual, em consonância com as orientações curriculares vigentes. Nesse contexto, sugere-se também a criação de grupos de estudo e o uso de laboratórios, quando disponíveis, como forma de enriquecer o processo de aprendizagem e estimular a interação entre os estudantes.

No contexto desta apostila, o termo otimização refere-se à busca pela melhor solução possível dentro de um conjunto de alternativas, envolvendo problemas nos quais se procura maximizar ou minimizar valores segundo critérios previamente estabelecidos, como menor custo, maior eficiência ou melhor desempenho. A Pesquisa Operacional, área à qual a programação dinâmica está diretamente associada, está ligada à nossa vida cotidiana e utiliza modelos matemáticos para apoiar a tomada de decisões e a análise de situações em diferentes níveis. Ao enfatizar a escolha da melhor solução possível entre um conjunto finito ou enumerável de alternativas, fundamentada em recursividade, análise de estados e decomposição em etapas, esta obra diferencia-se da abordagem tradicional frequentemente encontrada em livros didáticos, que costuma associar a otimização quase exclusivamente ao uso de derivadas.

A organização da apostila em nove capítulos, tendo esta Introdução como Capítulo 1, reflete uma construção progressiva do conhecimento, na qual cada capítulo desempenha um papel específico na consolidação dos conceitos que fundamentam a programação dinâmica.

No Capítulo 2, são introduzidas as funções recursivas por meio do estudo de sequências clássicas, como progressões aritméticas e geométricas, fatorial, Fibonacci e a sequência de Collatz, possibilitando ao leitor compreender a ideia de processos definidos em etapas e dependentes de estados anteriores.

Em seguida, no Capítulo 3, o estudo de máximos e mínimos amplia essa perspectiva ao investigar o comportamento de funções e sequências, incluindo a análise do valor máximo da sequência de Collatz. Nesse capítulo, os problemas são explorados por meio de abordagens algébrica e gráfica, favorecendo uma melhor visualização dos resultados e introduzindo, de forma gradual, a noção de otimização.

Posteriormente, no Capítulo 4, são apresentadas as noções básicas de grafos, suas áreas de aplicação e um breve resgate histórico do primeiro estudo de que se tem notícia de teoria dos grafos. Nesse mesmo capítulo, são abordados também problemas de caminho mínimo, acompanhados de algumas aplicações. Tanto no estudo de grafos

quanto no de caminhos mínimos, destaca-se o caráter abstrato dessas estruturas e sua capacidade de modelar situações reais por meio de redes, nas quais a escolha do caminho mais curto assume papel central.

Esses conteúdos convergem, então, no Capítulo 5, para o estudo formal da programação dinâmica, no qual a decomposição em subproblemas, a análise de estados e o Princípio da Otimalidade de Bellman são sistematizados.

No Capítulo 6, apresenta-se o Problema da Mochila, um dos exemplos clássicos de aplicação da Programação Dinâmica, explorando sua formulação, modelagem matemática e resolução por meio da decomposição em subproblemas.

Na sequência, o Capítulo 7 dedica-se ao Problema da Mochila com Repetição, destacando as diferenças em relação ao problema clássico e mostrando como a possibilidade de selecionar um mesmo item diversas vezes modifica a formulação recursiva e o processo de construção da solução ótima.

O Capítulo 8 apresenta o Problema de Reposição, aplicação da Programação Dinâmica voltada ao planejamento da substituição de equipamentos. Nesse contexto, discutem-se os critérios envolvidos na tomada de decisão e a determinação de políticas ótimas que minimizam os custos ao longo de um horizonte de planejamento.

Por fim, o Capítulo 9 reúne as Considerações Finais, retomando os principais conceitos desenvolvidos ao longo da apostila e destacando como a integração entre recursão, otimização, grafos e programação dinâmica contribui para uma compreensão mais ampla da resolução de problemas. Após esse capítulo, são apresentadas as resoluções dos exercícios propostos e, ao final, as referências bibliográficas utilizadas na elaboração do material.

Ao articular conteúdos matemáticos tradicionais com métodos contemporâneos de resolução de problemas, esta obra busca contribuir para uma formação matemática mais integrada, crítica e significativa, reafirmando o papel da Matemática como ferramenta essencial para a análise, a modelagem e a resolução de problemas em diferentes contextos educacionais.

2

Funções Recursivas

2.1 Introdução 5
2.2 Definição 6
2.3 Progressão Aritmética 8
2.4 Progressão Geométrica 11
2.5 Fatorial 13
2.6 Sequência de Fibonacci 15
2.7 Sequência de Collatz 22
2.8 Uma Breve História das Funções Recursivas 25
2.9 Exercícios 27

2.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos as funções recursivas, um tipo especial de função capaz de construir-se a si mesma. Esse tipo de função estabelece uma relação entre um termo e outros termos anteriores, permitindo que uma sequência inteira seja definida a partir de poucas informações iniciais. Embora essa ideia pareça complexa inicialmente, veremos que ela aparece em diversas situações matemáticas já conhecidas e estudadas no Ensino Médio.

Para desenvolver essa compreensão, começaremos analisando duas sequências bastante familiares: a progressão aritmética e geométrica, observando como ambas podem ser descritas por regras recursivas. Em seguida, estudaremos o fatorial, uma função

fundamental tanto na Combinatória quanto em outras áreas da Matemática, e veremos como sua definição é naturalmente expressa de forma recursiva.

Avançando um pouco mais, encontraremos duas sequências famosas que ilustram de maneira elegante o poder da recursividade: a sequência de Fibonacci, conhecida em diversas aplicações dentro e fora da Matemática, e a intrigante sequência de Collatz, cuja simplicidade esconde um problema ainda em aberto no mundo acadêmico.

Para complementar o estudo, apresentaremos também uma breve história das funções recursivas, mostrando como essa ideia aparece ao longo do desenvolvimento da Matemática, e finalizaremos com uma seção de exercícios, que permitirá ao leitor testar seus conhecimentos e aprofundar o entendimento dos conceitos abordados.

Ao concluir este capítulo, o leitor perceberá que a recursividade não é apenas uma forma diferente de definir funções, mas um modo poderoso de pensar, capaz de revelar estruturas, simplificar problemas e conectar ideias matemáticas que, à primeira vista, poderiam parecer distantes.

2.2 Definição

A ideia de função recursiva está ligada à forma como certos problemas podem ser resolvidos a partir de versões menores de si mesmos, ou seja, as funções recursivas são baseadas na ideia de dividir para conquistar. Dizemos que uma função é recursiva quando um objeto é descrito usando valores anteriores já conhecidos, sempre partindo de uma situação inicial bem definida.

Definição 2.1: Função Recursiva

Uma função recursiva é, de modo geral, uma função que pode ser definida em termos de si mesma e que obedece a regras finitas de construção.

Para uma melhor compreensão do conceito de recursão, observe a Figura 2.1. Nela, dois espelhos estão posicionados de forma que um reflita a imagem do outro, criando uma sequência de repetições dentro da mesma figura. Esse processo contínuo de repetição representa a ideia de recursão infinita.

Uma função recursiva é aquela que chama a si mesma durante sua execução, dentro da função você tem a própria função, sempre avançando em direção a um caso inicial, chamado de caso base, que interrompe o processo. Essa forma de resolver problemas é especialmente útil quando se trabalha com estruturas organizadas em níveis, como árvores, listas e redes de caminhos.



Figura 2.1: Espelho infinito [1]

Para que uma função recursiva funcione corretamente, dois elementos são essenciais:

Caso base É a condição de parada. Sem ele, a função entraria em um ciclo infinito.

Passo recursivo É a chamada da própria função, mas com uma entrada menor ou mais simples.

No Ensino Médio, muitas vezes trabalhamos com funções recursivas sem perceber, pois elas aparecem com nomes diferentes e inseridas em diversos conteúdos da matemática. Um exemplo clássico é o fatorial, em que um número é definido a partir do produto dele com o fatorial do número anterior, repetindo a mesma ideia até chegar a um valor inicial bem simples. Outro exemplo bastante conhecido é a sequência de Fibonacci, na qual cada termo é obtido pela soma dos dois termos anteriores, mostrando claramente a ideia de repetição e dependência de valores já calculados. As progressões também podem ser compreendidas de forma recursiva, pois cada termo pode ser definido a partir do termo anterior, somando uma razão no caso da progressão aritmética ou multiplicando por uma razão no caso da progressão geométrica. Dessa forma, mesmo sem utilizar formalmente o nome “função recursiva”, o estudante do Ensino Médio já entra em contato com esse tipo de raciocínio ao estudar diferentes tópicos da matemática, desenvolvendo a capacidade de perceber padrões, relações e processos que se repetem de maneira organizada.

Vamos agora resolver alguns exemplos de funções recursivas com o objetivo de reforçar e consolidar os conceitos apresentados até o momento e tornar mais clara a ideia de como um problema pode ser definido e resolvido a partir de casos mais simples, que se repetem de forma organizada até alcançar a solução final.

No Ensino Médio, trabalhamos com diversos conteúdos nos quais é possível apresentar aos estudantes o conceito de função recursiva. A seguir, serão apresentadas algumas

seções com aplicações das funções recursivas em conteúdos que fazem parte do currículo desse nível de ensino.

2.3 Progressão Aritmética

Uma sequência de números reais em que a diferença entre um termo qualquer (a partir do segundo) e o termo antecedente é sempre a mesma (constante) é chamada de progressão aritmética (P.A.). Essa constante é chamada de razão da progressão aritmética. Essa característica corresponde exatamente à ideia de recursividade.

Definição 2.2: Progressão Aritmética

Chama-se progressão aritmética (P.A.) uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_n = a_{n-1} + r, \quad n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

Nessa forma de apresentação:

- a_1 representa o termo inicial da sequência, também chamado de caso base;
- $a_n = a_{n-1} + r$ é o passo recursivo, pois cada termo depende do anterior.

Chamaremos essa escrita, que utiliza a notação a_n, de relação de recorrência, pois ela explicita como os termos da sequência se relacionam entre si.

Nesta apostila, por uma questão de conveniência e para manter a coerência com outros conteúdos que envolvem recursão, utilizaremos uma notação alternativa, escrevendo a progressão aritmética como uma função recursiva:

Definição 2.3: Progressão Aritmética como Função Recursiva

Em sua forma recursiva, uma progressão aritmética pode ser definida por:

$$A(n) = \begin{cases} a, & n = 1, \\ A(n-1) + r, & n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

Nessa nova notação, $A(n)$ representa explicitamente uma função definida de forma recursiva, na qual o valor da função em n depende do valor da função em $n-1$.

É importante destacar que não há qualquer diferença matemática entre as expressões a_n e $A(n)$. Ambas descrevem a mesma progressão aritmética e produzem exatamente os mesmos termos. Trata-se apenas de uma mudança de notação, cujo objetivo é enfatizar o caráter funcional e recursivo da definição, facilitando a conexão com o estudo de funções recursivas e algoritmos.

No ensino médio, é muito comum trabalhar com a forma explícita da progressão aritmética:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

na qual o termo a_n é calculado diretamente, sem depender dos termos anteriores.

Essa forma explícita pode ser obtida a partir da relação de recorrência apresentada anteriormente, por meio da observação do padrão de crescimento constante da progressão. Assim, a progressão aritmética admite duas descrições complementares: uma recursiva, que evidencia a dependência entre termos consecutivos, e outra explícita, que permite o cálculo direto de qualquer termo.

Portanto, a progressão aritmética não é exclusivamente uma função recursiva. No entanto, interpretá-la dessa maneira é extremamente útil do ponto de vista didático, pois permite introduzir de forma natural a ideia de recursão, ao mesmo tempo em que prepara o estudante para conteúdos mais avançados.

As funções recursivas podem ser calculadas de duas formas diferentes, chamadas aqui de forma progressiva e forma regressiva.

Na forma progressiva, o cálculo começa a partir dos valores iniciais da função e avança passo a passo para os termos seguintes. Ou seja, conhecendo o primeiro termo (ou os primeiros termos), usamos a regra recursiva para construir os próximos valores, um após o outro. É comum utilizarmos essa forma quando queremos listar os termos de uma sequência em ordem crescente, como acontece em progressões aritméticas, progressões geométricas ou na sequência de Fibonacci. A ideia central é ir para frente, somando ou multiplicando conforme a regra da função.

Já na forma regressiva, o raciocínio acontece no sentido contrário. Parte-se de um termo mais avançado da função e, usando a relação recursiva, retorna-se aos termos

anteriores, até alcançar o valor inicial conhecido. Nessa abordagem, a função é "desmontada" passo a passo, reduzindo o índice até chegar ao caso inicial. Esse tipo de cálculo é comum quando se deseja entender de onde vem um valor específico ou quando a própria definição da função depende diretamente do termo anterior, como ocorre no fatorial.

Em resumo, a forma progressiva constrói a função do início para o fim, enquanto a forma regressiva reconstrói a função do fim para o início. Ambas utilizam a mesma regra recursiva; independentemente de resolvermos a função recursiva de forma progressiva ou regressiva, o resultado será o mesmo, pois a única coisa que muda é apenas o sentido do cálculo.

EXEMPLO 2.3.1: Dada a função recursiva

$$A(n) = \begin{cases} 2, & n = 1 \\ A(n-1) + 3, & n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

Vamos determinar os cinco primeiros termos da sequência e verificar se é uma progressão aritmética.

De forma progressiva, vamos gerar os cinco primeiros termos da sequência.

$$A(1) = 2$$
$$A(2) = A(1) + 3 = 2 + 3 = 5$$
$$A(3) = A(2) + 3 = 5 + 3 = 8$$
$$A(4) = A(3) + 3 = 8 + 3 = 11$$
$$A(5) = A(4) + 3 = 11 + 3 = 14$$

A sequência resultante é

$$(2, 5, 8, 11, 14, \dots)$$

que é uma progressão aritmética de razão 3.

EXEMPLO 2.3.2: Vamos calcular $A(5)$ da P.A. (Definição 2.3) de primeiro termo $a = 3$ e razão $r = 5$, de forma regressiva.

Vamos resolver de forma regressiva

$$\begin{aligned} A(5) &= A(5-1)+5 \\ &= A(4)+5 \\ &= A(4-1)+5+5 \\ &= A(3)+10 \\ &= A(3-1)+5+10 \\ &= A(2)+15 \\ &= A(2-1)+5+15 \\ &= A(1)+20 \\ &= 3+20 \\ &= 23 \end{aligned}$$

Portanto, $A(5) = 23$

2.4 Progressão Geométrica

Uma sequência de números reais não nulos em que o quociente entre um termo qualquer (a partir do segundo) e o termo antecedente é sempre o mesmo (constante) é chamada de progressão geométrica (P.G.). Essa constante é chamada razão da progressão geométrica e é indicada por q.

Definição 2.4: Progressão Geométrica

Chama-se progressão geométrica (P.G.) uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} g_1 = g, \\ g_n = g_{n-1} \cdot q, \quad n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

Nessa definição

- g_1 é o termo inicial (caso base);
- $g_n = g_{n-1} \cdot q$ é o passo recursivo.

Uma progressão geométrica (P.G.) pode ser descrita como uma função recursiva, embora, assim como a progressão aritmética, ela também possa ser apresentada na forma recursiva.

Definição 2.5: Progressão Geométrica como Função Recursiva

Em sua forma recursiva, uma progressão geométrica pode ser definida por:

$$G(n) = \begin{cases} g, & n = 1 \\ G(n-1) \cdot q, & n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

Convém destacar que as expressões g_n e $G(n)$ são matematicamente equivalentes, pois ambas descrevem a mesma progressão geométrica e produzem os mesmos termos. A adoção da notação funcional tem apenas finalidade didática e conceitual, enfatizando o caráter recursivo da sequência e sua relação com funções recursivas e procedimentos algorítmicos.

No ensino médio, é mais comum utilizar a forma explícita da progressão geométrica:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$

que permite calcular qualquer termo diretamente, sem precisar conhecer os anteriores.

Exemplo 2.4.1: Vamos calcular de forma progressiva $G(5)$ da P.G. (Definição 2.5) de primeiro termo $g = 2$ e razão $q = 3$.

Primeiro substituímos os valores dados na função recursiva

$$G(n) = \begin{cases} 2; & n = 1 \\ G(n-1) \cdot 3; & n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

Agora avaliamos de forma progressiva

$$\begin{aligned} G(1) &= 2 \\ G(2) &= G(1) \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6 \\ G(3) &= G(2) \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18 \\ G(4) &= G(3) \cdot 3 = 18 \cdot 3 = 54 \\ G(5) &= G(4) \cdot 3 = 54 \cdot 3 = 162 \end{aligned}$$

Portanto, $G(5) = 162$

Exemplo 2.4.2: Vamos calcular de forma regressiva $G(5)$ da P.G. (Definição 2.5), de primeiro termo $g = 2$ e razão $q = 3$.

Vamos resolver de forma regressiva.

$$\begin{aligned} G(5) &= G(5-1) \cdot 3 \\ &= G(4) \cdot 3 \\ &= G(4-1) \cdot 3 \cdot 3 \\ &= G(3) \cdot 9 \\ &= G(3-1) \cdot 3 \cdot 9 \\ &= G(2) \cdot 27 \\ &= G(2-1) \cdot 3 \cdot 27 \\ &= G(1) \cdot 81 \\ &= 2 \cdot 81 \\ &= 162 \end{aligned}$$

Portanto, $G(5) = 162$

2.5 Fatorial

O fatorial de um número possui diversas aplicações práticas, especialmente em situações que envolvem analise combinatória, permutações, combinações, binômio de Newton e no estudo de probabilidade. O fatorial tem aplicações em áreas como informática, estatística, física e engenharia, sempre que há necessidade de contar possibilidades ou analisar arranjos possíveis de elementos. Além disso tudo, o fatorial simplifica as formulas de arranjo e permutação, entre outras.

Definição 2.6: Fatorial

Seja n um número natural, definimos o fatorial de n (indicado por $n!$) através das relações:

I) $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ para $n = 2, 3, 4 \ldots$

II) Se $n = 1$, $1! = 1$.

III) Se $n = 0,\ 0! = 1.$

O conceito de fatorial fornece um exemplo típico de função definida de maneira recursiva. Para um número natural n, o fatorial $n!$ é tradicionalmente definido como o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a n. Em notação matemática:

$$\begin{aligned} n! &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 \\ &= n \cdot (n-1)! \qquad\qquad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Essa reescrita $n! = n \cdot (n-1)!$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, introduz uma forma recursiva para o fatorial, pois o valor da função em n é expresso em termos do valor da própria função em $n-1$. Entretanto, para que a definição seja completa, é necessário especificar um valor inicial que não dependa da mesma relação. Esse valor recebe o nome de caso base, que iremos estabelecer como sendo $0! = 1$.

Combinando o caso base com a definição de fatorial, obtém-se uma definição completa da função recursiva:

Definição 2.7: Fatorial como Função Recursiva

Em sua forma recursiva, o fatorial pode ser definido por:

$$n! = f(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ n \cdot f(n-1), & n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Na formula é evidente os dois elementos presentes na definição de funções recursivas, a regra que relaciona o valor atual ao valor anterior da função e um caso base que assegura o término do processo.

A notação $f(n)$ é utilizada apenas como uma forma alternativa de representar o fatorial $n!$. Ambas possuem exatamente o mesmo significado matemático e conduzem aos mesmos resultados. A escrita na forma $f(n)$ destaca mais claramente o mecanismo recursivo envolvido na definição do fatorial.

Exemplo 2.5.1: Dada a função fatorial (Definição 2.7), calcular $5! = f(5)$.

Vamos resolver de dois modos diferentes: forma regressiva e progressiva.

Primeiro modo de resolução: forma regressiva.

$$\begin{aligned}
f(5) &= 5 \cdot f(5-1) \\
&= 5 \cdot f(4) \\
&= 5 \cdot 4 \cdot f(4-1) \\
&= 5 \cdot 4 \cdot f(3) \\
&= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot f(3-1) \\
&= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot f(2) \\
&= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot f(2-1) \\
&= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot f(1) \\
&= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot f(1-1) \\
&= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot f(0) \\
&= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \\
&= 120
\end{aligned}$$

Portanto, $5! = f(5) = 120$

Segundo modo de resolução: Forma progressiva.

$$\begin{aligned}
f(1) &= 1 \\
f(2) &= 2 \cdot f(2-1) = 2 \cdot f(1) = 2 \cdot 1 = 2 \\
f(3) &= 3 \cdot f(3-1) = 3 \cdot f(2) = 3 \cdot 2 = 6 \\
f(4) &= 4 \cdot f(4-1) = 4 \cdot f(3) = 4 \cdot 6 = 24 \\
f(5) &= 5 \cdot f(5-1) = 5 \cdot f(4) = 5 \cdot 24 = 120
\end{aligned}$$

Portanto, $f(5) = 120$

2.6 Sequência de Fibonacci

Leonardo Fibonacci foi um matemático italiano do século XIII. Sua obra mais importante é o Liber Abaci (Livro de Cálculo) de 1202 [2]. É nesse livro que é proposto o problema dos coelhos, que aparece com frequência em livros de matemática escolar. O problema é enunciado no livro da seguinte maneira:

> "Imagine que um par de coelhos é colocado em uma área fechada. Os coelhos são capazes de se reproduzir a partir da idade de um mês, produzindo um par de filhotes (um macho e uma fêmea) todos os meses a partir então. Suponha que nenhum coelho morre e que todos os filhotes se tornam férteis a partir do primeiro mês de vida."

Vamos modelar o número de pares de coelhos presentes em cada geração ao longo do tempo. Inicialmente, um par de coelhos é colocado em uma área cercada; esse instante será denominado mês 1. Assim, no mês 1, é introduzido na área um casal jovem de coelhos. Dessa forma, a primeira geração é composta por 1 par de coelhos. No mês 2, esse casal atinge a maturidade, mas ainda não se reproduziu, de modo que a segunda geração continua apresentando 1 par de coelhos. No mês 3, o casal já maduro se reproduz pela primeira vez, dando origem a um novo par de coelhos. Assim, a terceira geração passa a ter 2 pares de coelhos. No mês 4, o casal inicial volta a se reproduzir, enquanto o casal mais jovem ainda não é fértil, resultando em 3 pares de coelhos, esse processo se repete indefinidamente.

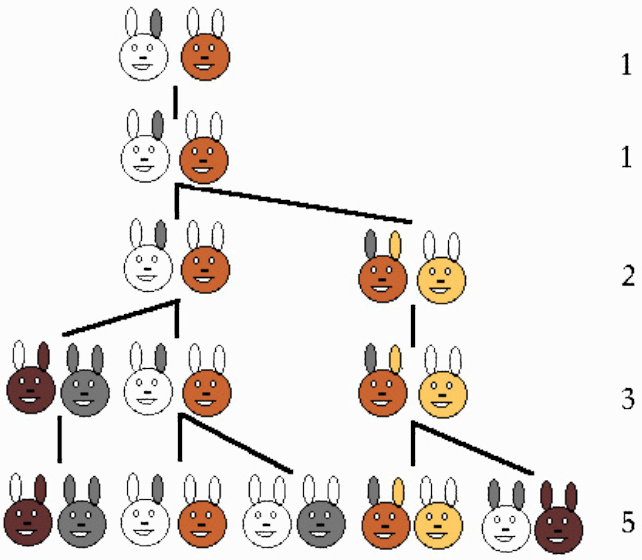


Figura 2.2: Sequência de Fibonacci [3]

Obtemos, assim, a sequência numérica a seguir, famosa pelo nome de sequência de Fibonacci,

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$$

Se somarmos os primeiros termos da sequência de Fibonacci, percebemos um padrão curioso. A sequência de Fibonacci é formada a partir de uma regra simples: cada termo é obtido pela soma dos dois termos anteriores. Por exemplo, a soma dos dois primeiros termos é $1 + 1 = 2$; o total 2 é o terceiro termo da sequência de Fibonacci;

a soma do segundo com o terceiro termo é $1 + 2 = 3$; o total 3 é o quarto termo da sequência; a soma do terceiro termo da sequência com o quarto termo é $2 + 3 = 5$, onde 5 é o quinto termo da sequência de Fibonacci; e assim por diante.

Esse procedimento com os termos da sequência de Fibonacci pode ser representado matematicamente por meio de uma expressão conhecida como relação de recorrência.

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (n \geq 0), \qquad \text{com} \qquad F_1 = 1,\ F_2 = 1$$

Essa relação pode ser compreendida intuitivamente observando a própria regra da sequência. Como cada termo é a soma dos dois anteriores, os valores "se acumulam" de maneira organizada, fazendo com que a soma cresça quase no mesmo ritmo que os próprios termos da sequência. Por isso, ao somar vários termos iniciais, o resultado acaba sendo praticamente um termo futuro da sequência, diferindo apenas por uma unidade. Essa sequência se tornou muito conhecida por aparecer em diferentes áreas, como matemática, natureza, arte, arquitetura e informática. No ensino médio, Fibonacci é geralmente lembrado principalmente por essa sequência, que ajuda a introduzir a ideia de recursividade, mostrando como um termo pode ser definido a partir de valores anteriores.

Definição 2.8: Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci é uma sucessão infinita de números inteiros em que cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois números imediatamente anteriores.

$$F(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ 1, & n = 1, \\ F(n-1) + F(n-2), & n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases} \tag{2.1}$$

Exemplo 2.6.1: Dada a sequência de Fibonacci em sua forma recursiva, (2.1), Vamos calcular $F(5)$ de forma progressiva.

Escrevendo a regra de Fibonacci usando a notação de função recursiva

$$F(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ 1, & n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

Resolveremos de forma progressiva.

$$
\begin{aligned}
&F(0) = 0\\
&F(1) = 1\\
&F(2) = F(1) + F(0) = 1\\
&F(3) = F(2) + F(1) = 2\\
&F(4) = F(3) + F(2) = 3\\
&F(5) = F(4) + F(3) = 5
\end{aligned}
$$

Portanto, o quinto número da sequência de Fibonacci é 5.

EXEMPLO 2.6.2: Dada a sequência de Fibonacci em sua forma recursiva, (2.1), vamos calcular $F(5)$ de forma regressiva.

Resolveremos de forma regressiva

$$
\begin{aligned}
F(5) &= F(5-1) + F(5-2)\\
&= F(4) + f(3)\\
&= F(4-1) + F(4-2) + F(3-1) + F(3-2)\\
&= F(3) + F(2) + F(2) + F(1)\\
&= F(3-1) + F(3-2) + F(2-1) +\\
&\qquad + F(2-2) + F(2-1) + F(2-2) + F(1)\\
&= F(2) + F(1) + F(1) + F(0) + F(1) + F(0) + F(1)\\
&= F(2-1) + F(2-2) + F(1) + F(1) + F(0) + F(1) + F(0) + F(1)\\
&= F(1) + F(0) + F(1) + F(1) + F(0) + F(1) + F(0) + F(1)\\
&= 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1\\
&= 5
\end{aligned}
$$

Portanto, o quinto número da sequência de Fibonacci é coincidentemente 5.

Podemos reescrever a regra de Fibonacci generalizando os valores iniciais. Cada escolha de condição inicial produz uma sequência distinta.

Definição 2.9: Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci generalizada é definida pela função recursiva

$$F(n) = \begin{cases} a, & n = 0, \\ b, & n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ são as condições iniciais.

Essa abordagem generalizada permite interpretar a sequência clássica de Fibonacci como um caso particular dessa definição geral, obtido ao se escolher $a = 0$ e $b = 1$. Outras escolhas para a e b conduzem a sequências que preservam a mesma estrutura recursiva, mas apresentam comportamentos distintos.

A seguir, faremos alguns exemplos explorando condições iniciais positivas e negativas na definição generalizada da recorrência de Fibonacci (2.2). Resolveremos esses exemplos de forma progressiva, deixando para o estudante a resolução de forma regressiva.

Exemplo 2.6.3: Condições iniciais positivas distintas.
Considere a função recursiva com condições iniciais $a = 2$ e $b = 3$. Vamos determinar seus primeiros termos.

Escrevendo a função recursiva

$$F(n) = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ 3, & n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

Resolvendo de forma progressiva.

$$\begin{aligned} F(0) &= 2 \\ F(1) &= 3 \\ F(2) &= F(1) + F(0) = 3 + 2 = 5 \\ F(3) &= F(2) + F(1) = 5 + 3 = 8 \\ F(4) &= F(3) + F(2) = 8 + 5 = 13 \\ F(5) &= F(4) + F(3) = 13 + 8 = 21 \end{aligned}$$

Obtemos a sequência

$$(2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$$

Observa-se que a estrutura recursiva é a mesma da clássica sequência de Fibonacci, mas os valores iniciais alteram toda a sequência, que cresce mais rapidamente desde os primeiros termos.

EXEMPLO 2.6.4: Condição inicial negativa.
Considere a função recursiva com condições iniciais $a = -1$ e $b = 1$. Vamos determinar seus primeiros termos.

Escrevendo a função recursiva

$$F(n) = \begin{cases} -1, & n = 0, \\ 1, & n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

Resolvendo de forma progressiva.

$$\begin{aligned} F(0) &= -1 \\ F(1) &= 1 \\ F(2) &= F(1) + F(0) = -1 + 1 = 0 \\ F(3) &= F(2) + F(1) = 0 + 1 = 1 \\ F(4) &= F(3) + F(2) = 1 + 0 = 1 \\ F(5) &= F(4) + F(3) = 1 + 1 = 2 \\ F(6) &= F(5) + F(4) = 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

Obtemos a sequência

$$(-1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, \dots)$$

Apesar do termo inicial negativo, a sequência passa a coincidir com a sequência clássica de Fibonacci a partir de certo índice.

EXEMPLO 2.6.5: Condições iniciais negativas.
Considere a função recursiva com condições iniciais $a = -2$ e $b = -1$. Vamos

determinar seus primeiros termos.

Escrevendo a função recursiva

$$F(n) = \begin{cases} -2, & n = 0, \\ -1, & n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

Resolvendo a função recursiva de forma progressiva ou regressiva, obtemos a seguinte sequência

$$(-2, -1, -3, -4, -7, -11, \dots)$$

Nesse caso, todos os termos permanecem negativos e o módulo dos valores cresce à medida que n aumenta.

Exemplo 2.6.6: Sinais opostos.
Considere a função recursiva com condições iniciais $a = 1$ e $b = -1$. Vamos determinar seus primeiros termos.

Escrevendo a função recursiva

$$F(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ -1, & n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

Resolvendo a função recursiva de forma progressiva ou regressiva, obtemos a seguinte sequência.

$$(1, -1, 0, -1, -1, -2, -3, \dots)$$

Aqui, a sequência apresenta alternância de sinais nos primeiros termos e comportamento distinto da sequência clássica.

2.7 Sequência de Collatz

Collatz definiu uma sequência numérica que pode ser construída como exemplo de função recursiva. A sequência é gerada por um algoritmo matemático que se resume a uma regra simples: escolhe-se qualquer número inteiro positivo e aplique os seguintes procedimentos. Se o número for par, divide-o por 2; caso seja ímpar, multiplica-o por 3 e adiciona-se 1. Cada escolha da condição inicial a produz uma sequência diferente.

Acredita-se que a Sequência de Collatz, independente do numero natural positivo escolhido como início, sempre alcança o valor 1 após um número finito de etapas. A partir desse ponto, a sequência entra em um ciclo fixo bem conhecido:

$$(1, 4, 2, 1, \text{ para sempre})$$

Para ilustrar, consideremos o número inicial 6. Como 6 é par, dividimos por dois, obtendo 3. O número 3 é ímpar, então calculamos $3 \cdot 3 + 1 = 10$. Como 10 é par, dividimos por dois, obtendo 5. Repetindo esse procedimento sucessivamente, obtemos a sequência

$$(6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1).$$

Mesmo começando com valores bem maiores, o comportamento observado é o mesmo: após subir e descer por vários valores intermediários, a sequência termina em 1.

Definição 2.10: Sequência de Collatz

Uma sequência de Collatz é gerada pela função recursiva

$$C(n) = \begin{cases} a, & n = 1 \\ \dfrac{C(n-1)}{2}, & C(n-1) \text{ par} \\ 3C(n-1) + 1, & C(n-1) \text{ ímpar} \end{cases} \tag{2.3}$$

a é a condição inicial e deve ser um número inteiro igual ou maior do que 1.

Exemplo 2.7.1: Considere a sequência de Collatz definida recursivamente por (2.3) com condição inicial $C(1) = 7$. Construa a sequência até alcançar o valor 1 e determine o número de passos necessários.

$$C(n) = \begin{cases} 7, & n = 1 \\ \dfrac{C(n-1)}{2}, & C(n-1) \text{ par} \\ 3C(n-1)+1, & C(n-1) \text{ ímpar,} \end{cases}$$

O termo inicial é $C(1) = 7$ que é ímpar. Assim,

$$C(2) = 3C(1) + 1 = 3 \cdot 7 + 1 = 22.$$

Como 22 é par, $C(3) = \dfrac{C(2)}{2} = \dfrac{22}{2} = 11.$

Como 11 é ímpar, $C(4) = 3C(3) + 1 = 3 \cdot 11 + 1 = 34$

Como 34 é par, $C(5) = \dfrac{C(4)}{2} = \dfrac{34}{2} = 17$

Como 17 é ímpar, $C(6) = 3C(5) + 1 = 3 \cdot 17 + 1 = 52$

Como 52 é par, $C(7) = \dfrac{C(6)}{2} = \dfrac{52}{2} = 26$

Como 26 é par, $C(8) = \dfrac{C(7)}{2} = \dfrac{26}{2} = 13$

Como 13 é ímpar, $C(9) = 3C(8) + 1 = 3 \cdot 13 + 1 = 40$

Como 40 é par, $C(10) = \dfrac{C(9)}{2} = \dfrac{40}{2} = 20$

Como 20 é par, $C(11) = \dfrac{C(10)}{2} = \dfrac{20}{2} = 10$

Como 10 é par, $C(12) = \dfrac{C(11)}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$

Como 5 é ímpar, $C(13) = 3C(12) + 1 = 3 \cdot 5 + 1 = 16$

Como 16 é par, $C(14) = \dfrac{C(13)}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$

Como 8 é par, $C(15) = \dfrac{C(14)}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$

Como 4 é par, $C(16) = \dfrac{C(15)}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

Como 2 é par, $C(17) = \dfrac{C(16)}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

Assim, a sequência atinge o valor 1 após 16 passos.

EXEMPLO 2.7.2: Considere a sequência de Collatz definida recursivamente com condição inicial $C(1) = 4$. Descreva o comportamento da sequência e identifique se há crescimento antes da convergência.

Como 4 é par,

$$C(2) = \frac{C(1)}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

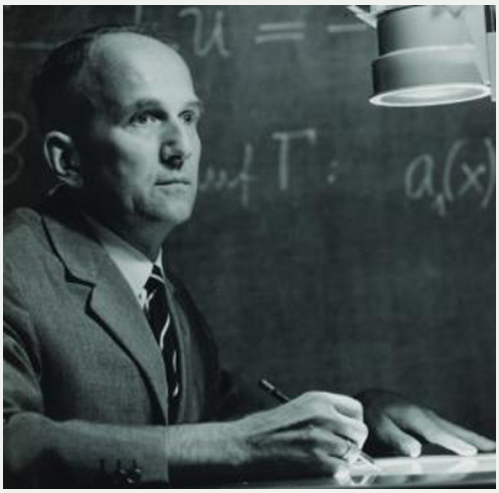
Como 2 é par,

$$C(3) = \frac{C(2)}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

A sequência atinge rapidamente o valor 1, sem apresentar crescimento intermediário. Esse exemplo mostra que, para certos valores iniciais, o processo é simples e curto.

Conjectura de Collatz

Entre os diversos problemas matemáticos que surgem a partir da observação de padrões simples, poucos são tão intrigantes quanto a Conjectura de Collatz, proposta em 1937 pelo matemático alemão Lothar Collatz. À primeira vista, trata-se apenas de um jogo com números inteiros positivos, baseado em uma regra elementar. No entanto, por trás dessa simplicidade aparente, esconde-se um comportamento extremamente complexo, que permanece sem demonstração geral até hoje, desafiando matemáticos do mundo inteiro.



Lothar Collatz

O ponto de partida é um número natural positivo qualquer. A partir dele, constrói-se uma sequência aplicando repetidamente a seguinte regra: se o número for par, divide-se por dois; se for ímpar, multiplica-se por três e soma-se um. Esse procedimento é então repetido indefinidamente, sempre utilizando o resultado anterior como nova entrada do processo. Ao chegar ao número 1, a sequência entra num ciclo fixo

$$(1, 4, 2, 1, \text{ para sempre}).$$

O aspecto mais surpreendente dessa conjectura é o contraste entre a simplicidade da regra e a dificuldade de sua análise teórica. Apesar de milhões de testes computacionais confirmarem o comportamento esperado para números extremamente grandes, ainda não se conhece uma demonstração matemática geral que garanta que o processo sempre converge para 1. No ano de 2020, com o auxílio de computadores, a conjectura foi testada para todos os números naturais de 1 até 2^{68}. Todos convergiram para o ciclo fixo $(1, 4, 2, 1,$ para sempre). Isso não prova a conjectura, pois a única coisa que podemos afirmar é que ela funciona até esse número, porém, pode existir algum número natural maior que 2^{68} que faça a sequência crescer indefinidamente ou entrar em um ciclo diferente do já conhecido.

Essa situação destaca uma diferença fundamental entre duas ideias importantes em Matemática: verificar e provar. Verificar consiste em testar muitos casos particulares, enquanto provar significa demonstrar que uma afirmação é válida para todos os casos possíveis, inclusive aqueles que jamais poderemos testar individualmente. A Conjectura de Collatz já foi amplamente verificada, mas ainda não foi provada.

Além disso, a conjectura permite discutir ideias centrais da Matemática contemporânea, como a imprevisibilidade de sistemas simples, o papel dos computadores na investigação matemática e os limites do conhecimento atual. Mesmo sem uma prova formal, ela mostra ao estudante que a Matemática não é uma ciência fechada e definitiva, mas um campo vivo, repleto de perguntas em aberto.

A Conjectura de Collatz é um excelente exemplo de como regras elementares podem gerar estruturas ricas e complexas, servindo tanto como objeto de estudo matemático quanto como ferramenta didática para o desenvolvimento do raciocínio lógico e algorítmico.

2.8 Uma Breve História das Funções Recursivas

Um dos primeiros exemplos de raciocínio recursivo aparece na Grécia Antiga, nos Elementos de Euclides, escritos por volta de 330-320 a.C. Esse método, conhecido como algoritmo de Euclides, foi criado para calcular o Máximo Divisor Comum (MDC) de dois números naturais. Nesse método, o problema é resolvido repetindo um mesmo procedimento, no qual a cada passo os números envolvidos diminuem,

até que chegue a um caso simples que pode ser resolvido diretamente. Essa ideia de reduzir o problema original a versões menores é a essência da recursão.

Séculos depois, mais precisamente no século XIII, o matemático italiano Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, apresentou uma sequência numérica em que cada termo é obtido a partir da soma dos dois termos anteriores. Essa sequência, hoje chamada de sequência de Fibonacci, tornou-se um dos exemplos mais conhecidos de função definida de forma recursiva e ajuda a ilustrar como regras simples podem gerar padrões complexos.

No final do século XIX, a recursão passou a ocupar um papel ainda mais importante nos estudos sobre os fundamentos da matemática. Giuseppe Peano propôs um conjunto de axiomas, conhecidos hoje como os cinco axiomas de Peano, que descrevem a construção dos números naturais, nos quais cada número é definido a partir do anterior. Essa abordagem mostrou que a recursão não é apenas uma técnica de cálculo, mas uma forma natural de organizar conceitos matemáticos. A recursão está fortemente relacionada ao quinto desses axiomas, o da indução matemática, que no ensino médio é estudado, por exemplo, em demonstrações envolvendo progressões aritméticas e progressões geométricas.

No século XX, com o avanço da lógica matemática e da fundamentação da matemática moderna, a função recursiva surge a partir do esforço dos matemáticos em formalizar o conceito intuitivo de “procedimento efetivo” ou “método mecânico” de cálculo. Pesquisadores como Kurt Gödel, Alonzo Church, Stephen Kleene e Alan Turing demonstraram que muitos processos matemáticos podem ser descritos por funções recursivas. Esses estudos deram origem aos fundamentos da ciência da computação, ao mostrar como problemas podem ser resolvidos por meio de procedimentos bem definidos e repetitivos.

A teoria das funções recursivas, assim consolidada, fornece a base para o estudo formal da computabilidade, servindo como elo entre lógica, teoria dos números e ciência da computação. Ela permite distinguir funções que podem ser calculadas por um procedimento finito das que não o podem, e suas ideias permeiam toda a matemática contemporânea, desde algoritmos até a teoria da complexidade computacional.

Assim, a história das funções recursivas revela como uma ideia simples e intuitiva atravessou séculos de evolução científica, tornando-se um dos conceitos fundamentais tanto da matemática quanto da computação moderna.

2.9 Exercícios

1) [resp] Dada a progressão aritmética escrita na forma de função recursiva

$$A(n) = \begin{cases} 2, & n = 1 \\ A(n-1) + 3, & n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

Vamos determinar o quinto termos da progressão aritmética.

2) [resp] Dada a função recursiva

$$G(n) = \begin{cases} 3, & n = 1 \\ G(n-1) \cdot 2 & n = 2, 3, 4, \ldots . \end{cases}$$

Determine o quinto termo da progressão geométrica.

3) [resp] Dada a sequência de Collatz definida recursivamente por

$$C(n) = \begin{cases} 20, & n = 0 \\ \dfrac{C(n-1)}{2}, & C(n-1) \text{ par} \\ 3C(n-1) + 1, & C(n-1) \text{ ímpar} \end{cases}$$

Determine os termos da sequência até o primeiro aparecimento do valor 1.

4) [resp] (ENEM-2020) Um atleta realiza um treinamento em que, no primeiro dia, corre 2 km. A cada dia seguinte, ele aumenta a distância percorrida em 500 metros.
Quantos quilômetros esse atleta correrá no quinto dia de treinamento?

a) 3 km

b) 3,5 km

c) 4 km

d) 4,5 km

e) 5 km

5) [resp] (ENEM-2018) O consumo mensal de energia elétrica de uma residência foi de 200 kWh no primeiro mês. Nos meses seguintes, o consumo aumentou sempre em 10 kWh em relação ao mês anterior.
Qual foi o consumo no quarto mês?

a) 210 kW h

b) 220 kW h

c) 230 kW h

d) 240 kW h

e) 250 kW h

6) [resp] (ENEM-2017) Um estudante fez uma aplicação financeira depositando um valor inicial de R$ 1000,00. A cada mês, o valor aplicado rende 1% de juros sobre o saldo do mês anterior. Desconsiderando novos depósitos, qual será o saldo após dois meses?

a) R$ 1010,00

b) R$ 1020,10

c) R$ 1020,00

d) R$ 1030,10

e) R$ 1040,00

7) [resp] (ENEM-2012) Uma sequência numérica é definida da seguinte forma: o primeiro termo é igual a 1 e cada termo seguinte é obtido somando-se ao termo anterior o número par seguinte. Assim, os primeiros termos da sequência são: $1, 3, 7, 13, \ldots$
Qual é o valor do quinto termo dessa sequência?

a) 17 b) 19 c) 21 d) 23 e) 25

8) [resp] (ENEM-2013) Uma colônia de bactérias dobra de tamanho a cada hora. Inicialmente, há uma bactéria nessa colônia.
Qual será o número de bactérias presentes após 5 horas?

a) 5 b) 10 c) 16 d) 32 e) 64

3

Máximos e Mínimos

3.1 Introdução 28
3.2 Problemas de Otimização 29
3.3 Máximos e Mínimos da Parábola 33
3.4 Máximos e Mínimos da Função Cúbica 40
3.5 Máximo da Sequência de Collatz 42
3.6 Exercícios 47

3.1 Introdução

A identificação de valores extremos constitui uma das ideias centrais da Matemática, estando presente em problemas que envolvem otimização, análise de comportamento e tomada de decisões. Determinar quando uma quantidade atinge seu maior ou menor valor possível permite compreender limites, tendências e estruturas subjacentes a diversos fenômenos matemáticos e aplicações práticas. Nesse contexto, o estudo de máximos e mínimos oferece ferramentas fundamentais para a modelagem e interpretação de situações tanto abstratas quanto concretas.

Neste capítulo, iniciamos com a discussão conceitual de máximos e mínimos, estabelecendo definições e interpretações gráficas que servirão de base para os tópicos seguintes. Em seguida, analisamos a parábola, cuja forma geométrica e expressão algébrica permitem identificar, de maneira clara, o ponto em que ocorre o valor máximo ou mínimo da função, conhecido como vértice. Esse caso desempenha papel essencial na compreensão inicial dos extremos em funções polinomiais.

Posteriormente, ampliamos o estudo para a função cúbica, que apresenta um comportamento mais complexo e possibilita a ocorrência de máximos e mínimos locais. A análise desse tipo de função contribui para uma compreensão mais profunda da variação das funções e da coexistência de diferentes comportamentos em intervalos distintos do domínio.

Por fim, o capítulo aborda o valor máximo da sequência de Collatz, introduzindo a noção de máximo em um contexto não contínuo e recursivo. Esse estudo evidencia que a ideia de valor extremo não se restringe a funções clássicas, mas também aparece em sequências definidas por regras simples, embora apresentem comportamento altamente não trivial.

Ao longo do capítulo, busca-se evidenciar a unidade conceitual entre os diferentes temas apresentados, mostrando que a noção de máximo e mínimo atravessa distintas estruturas matemáticas. Ao final, espera-se que o leitor reconheça esses conceitos como ferramentas fundamentais para a análise e compreensão de problemas matemáticos em diferentes contextos.

3.2 Problemas de Otimização

Problemas de otimização são situações em que desejamos encontrar a maneira ótima (melhor solução) de fazer alguma coisa dentre várias alternativas. A “melhor solução” pode significar:

- o menor custo,
- o maior lucro,
- o menor tempo,
- a maior eficiência.

Ou seja, qualquer valor que queremos maximizar ou minimizar.

São problemas de otimização:

- Qual o caminho de menor distância entre a cidade de Chapada Gaúcha e a cidade de Belo Horizonte em um mapa?
- Qual a rota de menor custo para um caminhão visitar todos os clientes e retornar ao depósito?

- ◇ Qual é a quantidade de cada produto que deve ser fabricada para maximizar o lucro da empresa, respeitando limite de máquinas e materiais?
- ◇ Qual é o menor custo para transportar mercadorias de vários centros de distribuição até os clientes?

Todos os problemas acima podem ser resolvidos encontrando os valores máximo e mínimo de uma função. Logo, vamos entender um pouco mais sobre valores máximo e mínimo.

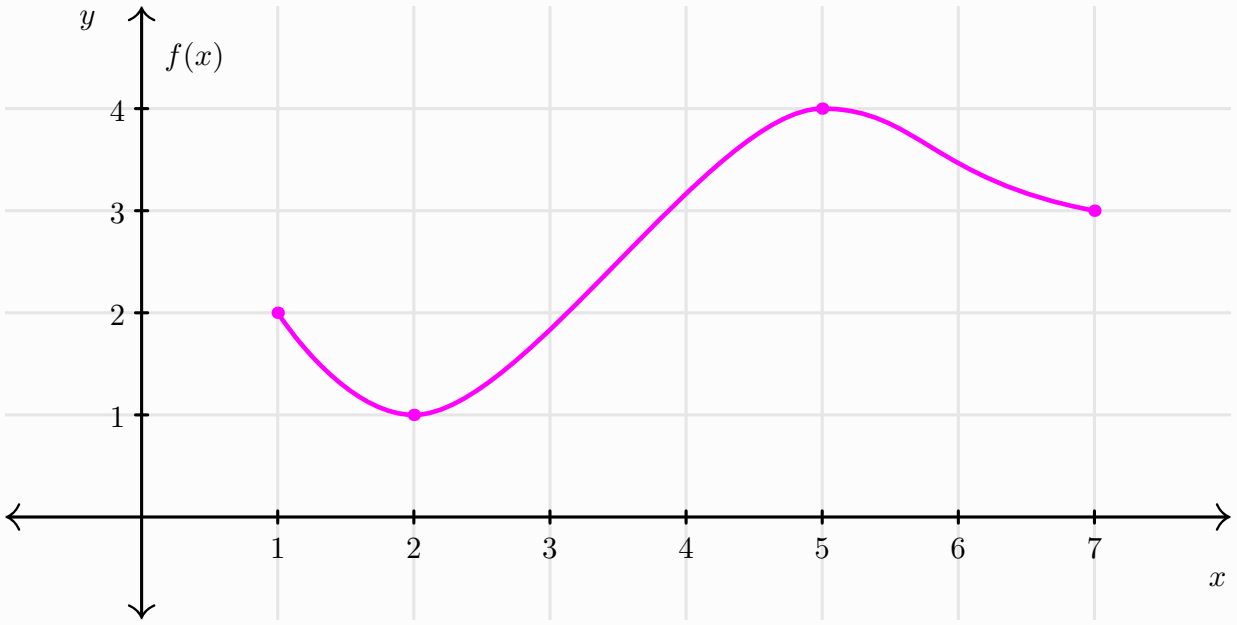


Figura 3.1: Máximos e mínimos de uma função.

Observe na Figura 3.1, que o ponto mais baixo no gráfico da função f é o ponto $(2, 1)$, e o ponto mais alto é $(5, 4)$. Ou seja, o menor valor de f é quando $x = 2$ e $f(x) = 1$ $f(2) = 1$ e o maior valor de f é quando $x = 5$ e $f(x) = 4$ $f(5) = 4$. Assim, temos que $f(2) = 1$ é o mínimo global de f e $f(5) = 4$ é o máximo global de f.

Definição 3.1: Máximo e Mínimo Global

Seja f uma função real e seja c um ponto em seu domínio. Então $f(c)$ é o

- ◇ valor máximo global da função f se $f(x) \leq f(c)$ para todo x do domínio.
- ◇ valor mínimo global da função f se $f(x) \geq f(c)$ para todo x do domínio.

Absoluto é sinônimo de global, às vezes chamamos de máximo e mínimo absoluto

Analisando agora a figura abaixo, podemos observar o gráfico de uma função f com máximo global em d e mínimo global em a. Se considerarmos apenas o intervalo

(a, c) do gráfico, o maior valor da função f será em b, então $f(b)$ é o maior valor da função f nesse intervalo e é chamado de valor máximo local de f. Da mesma forma, no intervalo (b, d) o menor valor da função f será em c, então $f(c)$ é chamado de valor mínimo local de f

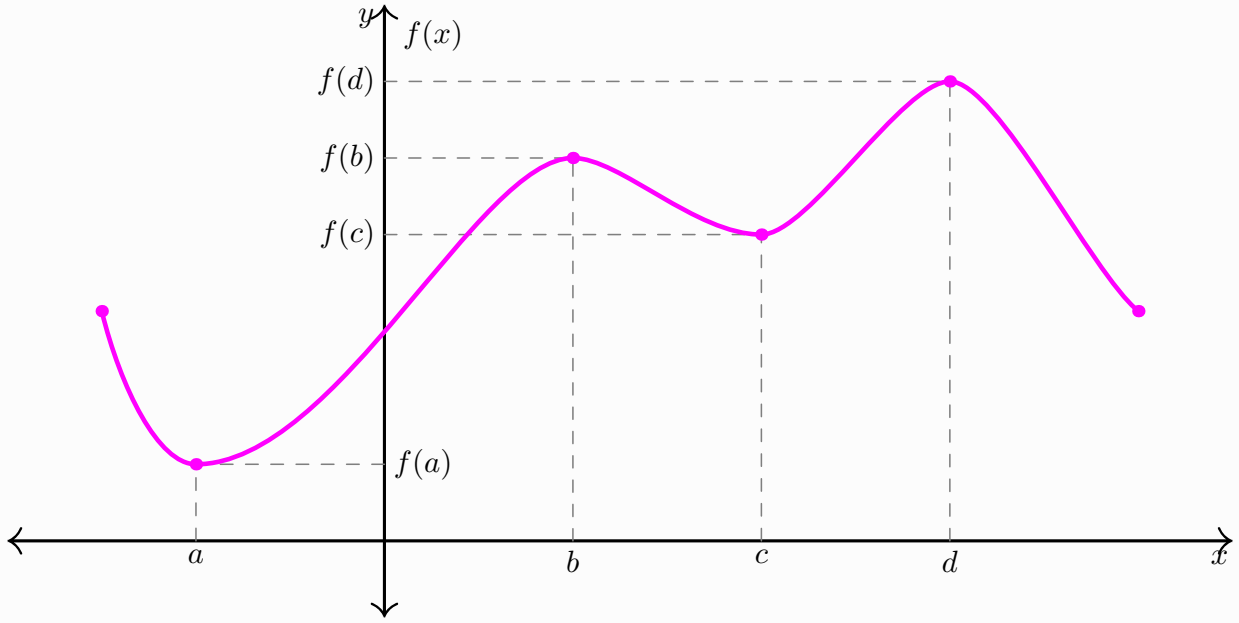


Figura 3.2: Máximos e mínimos locais de uma função.

Definição 3.2: Máximo e Mínimo Local

O número $f(c)$ e um

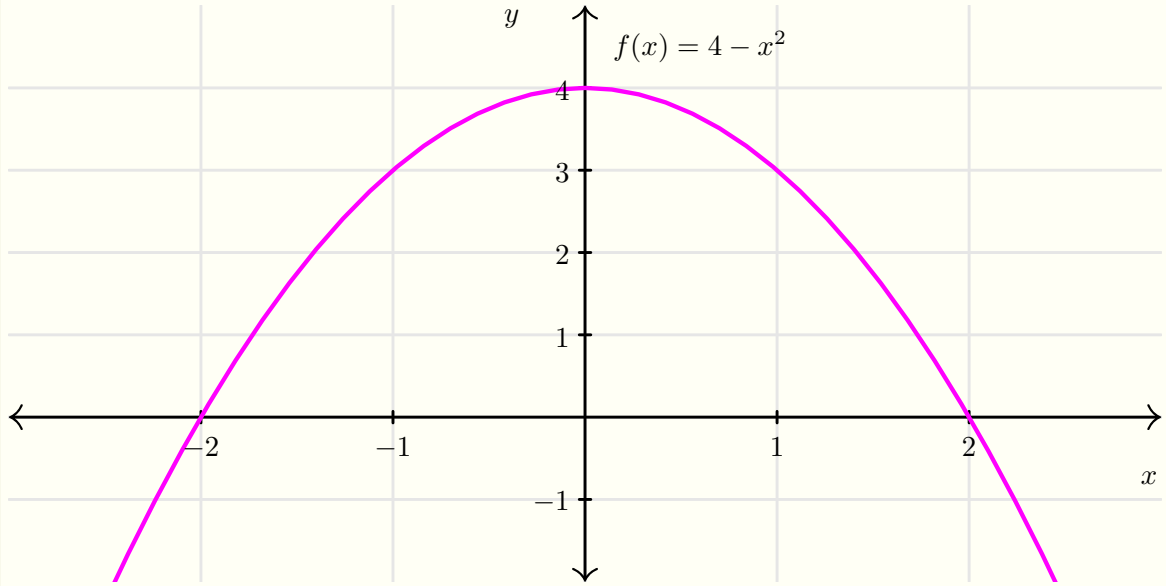
- valor máximo local da função f se $f(x) \leq f(c)$ quando x está próximo de c.
- valor mínimo local da função f se $f(x) \geq f(c)$ quando x está próximo de c.

Exemplo 3.2.1: Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 4 - x^2$. Vamos encontrar o seu máximo global.

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 4 - x^2$ tem como vértice o ponto $f(0) = 4$, que é seu máximo global: para $x \neq 0$ temos

$$f(x) = 4 - x^2 < 4 = f(0).$$

Para uma comprovação visual observe o gráfico abaixo:

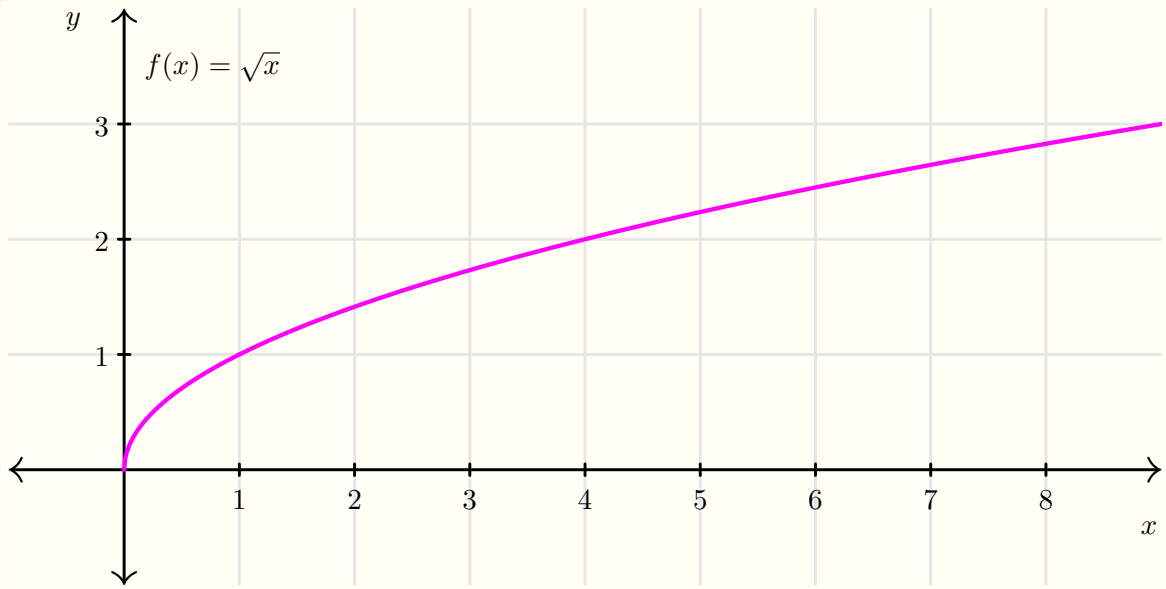


EXEMPLO 3.2.2: Seja a função $f\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$. Vamos encontrar o seu mínimo global.

A função $f\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$ tem como mínimo global o ponto $f(0) = 0$. De fato, para $x \neq 0$ temos

$$f(0) = 0 < \sqrt{x} = f(x)$$

Para uma comprovação visual observe o gráfico abaixo.



3.3 Máximos e Mínimos da Parábola

As parábolas constituem uma das curvas mais estudadas da Matemática. Elas aparecem em diversas situações reais: o arco de uma bola chutada, a trajetória de um jato d'água em uma fonte, o espelho parabólico de uma antena, e até na forma de pontes e refletores de som. Matematicamente, surgem como o gráfico de uma função polinomial de segundo grau.



Figura 3.3: Ponte Juscelino Kubitschek [4]

Definição 3.3: Função Quadrática

Uma função quadrática é toda função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

com a, b, $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. O gráfico dessa função é uma parábola.

O número a é responsável pela abertura e pela concavidade da parábola; o coeficiente b influencia a posição do vértice no eixo x, e o c desloca o gráfico verticalmente.

Teorema 3.4: Vértice da Parábola

O vértice da parábola $y = ax^2 + bx + c$ tem coordenadas

$$v\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

e sua concavidade é voltada para cima se $a > 0$ e para baixo se $a < 0$.

Observação: O valor de x que fornece o máximo ou mínimo da parábola é

$$x_v = -\frac{b}{2a}.$$

Esse ponto é chamado vértice. O valor correspondente $f(x_v)$ é o valor máximo (se $a < 0$) ou mínimo (se $a > 0$). Esse é o ponto mais "alto" ou mais "baixo" do gráfico.

Antes de ver exemplos, vale lembrar que podemos interpretar o coeficiente a como o "ritmo de crescimento" da parábola: quanto maior $|a|$, mais estreita ela é.

EXEMPLO 3.3.1: (Vértice em um número inteiro).
Vamos determinar o ponto de máximo ou mínimo da função

$$f(n) = n^2 - 6n + 8$$

para $n \in A$, onde A é o conjunto formado pelos seguintes números inteiros

$$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Como o coeficiente $a = 1 > 0$, essa parábola tem um ponto de mínimo. Logo, queremos determinar:

$$\min_{n \in A} f(n)$$

A função é

$$f(n) = n^2 - 6n + 8$$

Vamos construir uma tabela e escolher alguns valores inteiros para x.

$$\begin{aligned}
f(-2) &= (-2)^2 - 6 \cdot (-2) + 8 = 4 + 12 + 8 = 24 \\
f(-1) &= (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 8 = 1 + 6 + 8 = 15 \\
f(0) &= 0^2 - 6 \cdot 0 + 8 = 0 - 0 + 8 = 8 \\
f(1) &= 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 = 1 - 6 + 8 = 3 \\
f(2) &= 2^2 - 6 \cdot 2 + 8 = 4 - 12 + 8 = 0 \\
f(3) &= 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = 9 - 18 + 8 = -1 \\
f(4) &= 4^2 - 6 \cdot 4 + 8 = 16 - 24 + 8 = 0 \\
f(5) &= 5^2 - 6 \cdot 5 + 8 = 25 - 30 + 8 = 3 \\
f(6) &= 6^2 - 6 \cdot 6 + 8 = 36 - 36 + 8 = 8
\end{aligned}$$

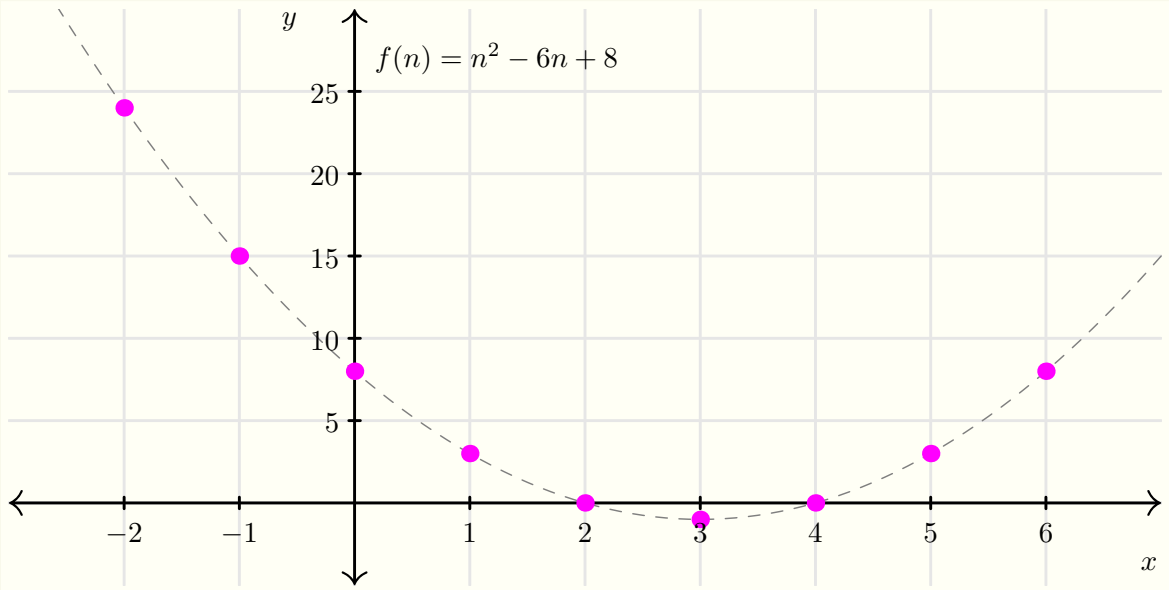
Analisando a tabela

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(n)$	24	15	9	3	0	-1	0	3	8

Analisando a tabela acima, temos que o menor valor de $f(n)$ é -1, que ocorre quando $n = 3$.

Depois de montar e analisar a tabela concluímos que

$$\min_{n \in A} f(n) = -1$$



Exemplo 3.3.2: (Vértice entre dois números inteiros).
Vamos determinar o ponto de máximo ou mínimo da função

$$f(n) = n^2 - 7n + 10$$

para $n \in B$, onde B é o conjunto formado pelos seguintes números inteiros:

$$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Como o coeficiente $a = 1 > 0$, essa parábola tem ponto de mínimo. Logo,

queremos determinar:

$$\min_{n \in B} f(n)$$

Vamos calcular $f(n)$ para $n \in B$.

$$\begin{aligned}
f(-2) &= (-2)^2 - 7 \cdot (-2) + 10 = 4 + 14 + 10 = 28 \\
f(-1) &= (-1)^2 - 7 \cdot (-1) + 10 = 1 + 8 + 10 = 19 \\
f(0) &= 0^2 - 7 \cdot 0 + 10 = 0 + 0 + 10 = 10 \\
f(1) &= 1^2 - 7 \cdot 1 + 10 = 1 - 7 + 10 = 4 \\
f(2) &= 2^2 - 7 \cdot 2 + 10 = 4 - 14 + 10 = 0 \\
f(3) &= 3^2 - 7 \cdot 3 + 10 = 9 - 21 + 10 = -2 \\
f(4) &= 4^2 - 7 \cdot 4 + 10 = 16 - 28 + 10 = -2 \\
f(5) &= 5^2 - 7 \cdot 5 + 10 = 25 - 35 + 10 = 0 \\
f(6) &= 6^2 - 7 \cdot 6 + 10 = 36 - 42 + 10 = 4
\end{aligned}$$

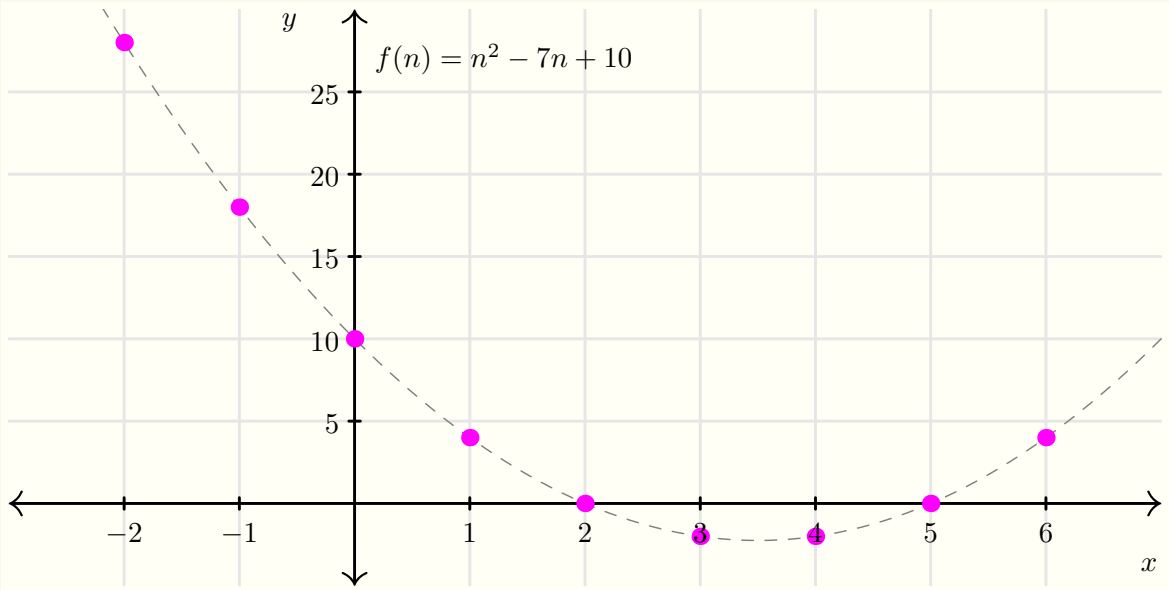
Organizando os resultados obtidos em uma tabela, temos:

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(n)$	28	19	10	4	0	-2	-2	0	4

Analisando a tabela acima, temos que o menor valor de $f(n)$ é 0, que ocorre quando $n = 2$ e $n = 5$. Temos também que o maior valor de $f(n)$ é 28 que acontece quando $n = -2$. Concluímos então que:

$$\min_{n \in B} f(n) = 0$$

$$\max_{n \in B} f(n) = 28$$



Se estivéssemos trabalhando no conjunto dos números reais, a função $f(n)$ teria um valor de mínimo que nesse caso poderia ser encontrado de duas maneiras diferentes.

Primeira maneira: Através do eixo de simetria que é perpendicular ao eixo x e que passa pelo vértice no ponto médio entre 3 e 4, ou seja,

$$x_v = 3{,}5$$

Assim, fazendo $n = 3{,}5$ encontramos o y_v:

$$f(3{,}5) = 3{,}5^2 - 7 \cdot 3{,}5 + 10 = 12{,}25 - 24{,}5 + 10 = -2{,}25$$

Logo, $y_v = -2{,}25$

Segunda maneira: Utilizando a fórmula do y_v que é apresentada aos estudantes no primeiro ano do Ensino Médio. Assim:

Na função real $f(n) = n^2 - 7n + 10$ temos $a = 1$, $b = -7$ e $c = 10$. Substituindo na fórmula

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

temos que $y_v = -2{,}25$

$$\min_{n \in B} f(n) = -2{,}25$$

EXEMPLO 3.3.3: (Vértice com coordenada não inteira).
Vamos determinar o ponto de máximo ou mínimo da função

$$f(n) = n^2 - 7{,}4n + 10$$

para $n \in C$, onde C é o conjunto de números inteiros compreendidos entre -1 e 7.

Como $a = 1 > 0$, essa parábola tem mínimo. Logo, queremos determinar:

$$\min_{n \in A} f(n)$$

Vamos construir uma tabela e escolhermos alguns valores inteiros para x.

$$\begin{aligned}
f(-1) &= (-1)^2 - 7{,}4 \cdot (-1) + 10 = 1 + 7{,}4 + 10 = 18{,}4 \\
f(0) &= (0)^2 - 7{,}4 \cdot 0 + 10 = 0 - 0 + 10 = 10 \\
f(1) &= 1^2 - 7{,}4 \cdot 1 + 10 = 1 - 7{,}4 + 10 = 3{,}6 \\
f(2) &= 2^2 - 7{,}4 \cdot 2 + 10 = 4 - 14{,}8 + 10 = -0{,}8 \\
f(3) &= 3^2 - 7{,}4 \cdot 3 + 10 = 9 - 22{,}2 + 10 = -3{,}2 \\
f(4) &= 4^2 - 7{,}4 \cdot 4 + 10 = 16 - 29{,}6 + 10 = -3{,}6 \\
f(5) &= 5^2 - 7{,}4 \cdot 5 + 10 = 25 - 37 + 10 = -2 \\
f(6) &= 6^2 - 7{,}4 \cdot 6 + 10 = 36 - 44{,}4 + 10 = 1{,}6 \\
f(7) &= 7^2 - 7{,}4 \cdot 7 + 10 = 49 - 51.8 + 10 = 7{,}2
\end{aligned}$$

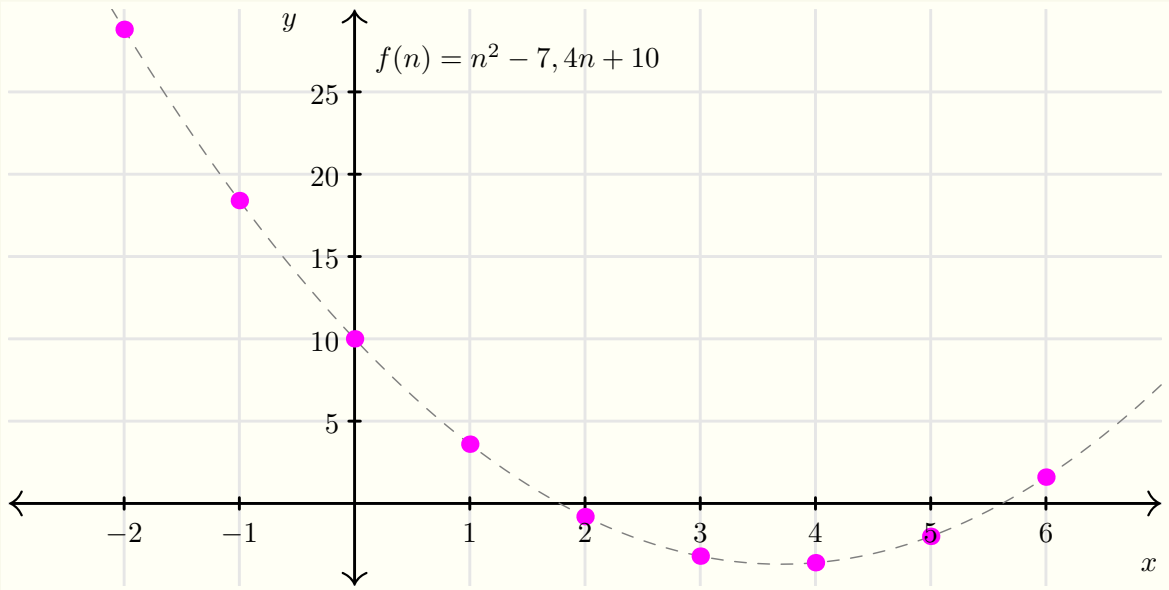
Organizando os resultados obtidos em uma tabela, temos:

n	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(n)$	18,4	10	3,6	$-0{,}8$	$-3{,}2$	$-3{,}6$	-2	1,6	7,2

Analisando a tabela acima, temos que o menor valor de $f(n)$ é $-3{,}6$, que ocorre quando $n = 3$, e o maior valor de $f(n)$ é 18,4 quando $n = -1$. Concluímos então que:

$$\min_{n \in C} f(n) = -3{,}6$$
$$\max_{n \in C} f(n) = 18{,}4$$

Analisando o gráfico abaixo, fica fácil ver o ponto máximo e mínimo da função inteira no intervalo desejado.



No conjunto dos números reais, ao contrário do exemplo 3.3 não é fácil a localização do eixo de simetria tornando a localização do x_v por meio do ponto médio impossível, nesse caso, vamos localizar o ponto de máximo da função $f(n)$ em $\mathbb{R}$ utilizando a formula do y_v.

Na função $f(n) = n^2 - 7{,}4 \cdot n + 10$ temos que $a = 1$, $b = -7{,}4$ e $c = 10$. Assim:

$$\begin{aligned} y_v &= -\frac{\Delta}{4a} \\ &= -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ &= -\frac{(7{,}4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}{4} \\ &= -3{,}69 \end{aligned}$$

Portanto, no conjunto dos números rais, a função $f(n)$ possui apenas o ponto mínimo $f(n) = -3{,}69$.

$$\min_{n \in C} f(n) = -3{,}69$$

3.4 Máximos e Mínimos da Função Cúbica

Funções cúbicas aparecem em contextos onde há variação de crescimento e decrescimento, ou seja, quando a curva "sobe e desce". Elas permitem estudar situações mais ricas do que as parábolas, já que podem ter até dois pontos críticos (máximo e mínimo locais).

Definição 3.5: Função cúbica

Uma função cúbica é toda função polinomial do tipo

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0.$$

Exemplo 3.4.1: Vamos determinar o máximo local e mínimo local da função

$$f(n) = n^3 - 6n^2 + 9n + 2$$

para $n \in A$, onde A é o conjunto dos números inteiros compreendidos entre 0 e 4.

Queremos determinar o mínimo e o máximo local. Vamos calcular $f(n)$ para $n \in A$.

$$f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 + 2 = 0 - 0 + 0 + 2 = 2$$
$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 2 = 1 - 6 + 9 + 2 = 6$$
$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 + 2 = 8 - 24 + 18 + 2 = 4$$
$$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 2 = 27 - 54 + 27 + 2 = 2$$
$$f(4) = 4^3 - 6 \cdot 4^2 + 9 \cdot 4 + 2 = 64 - 96 + 36 + 2 = 6$$

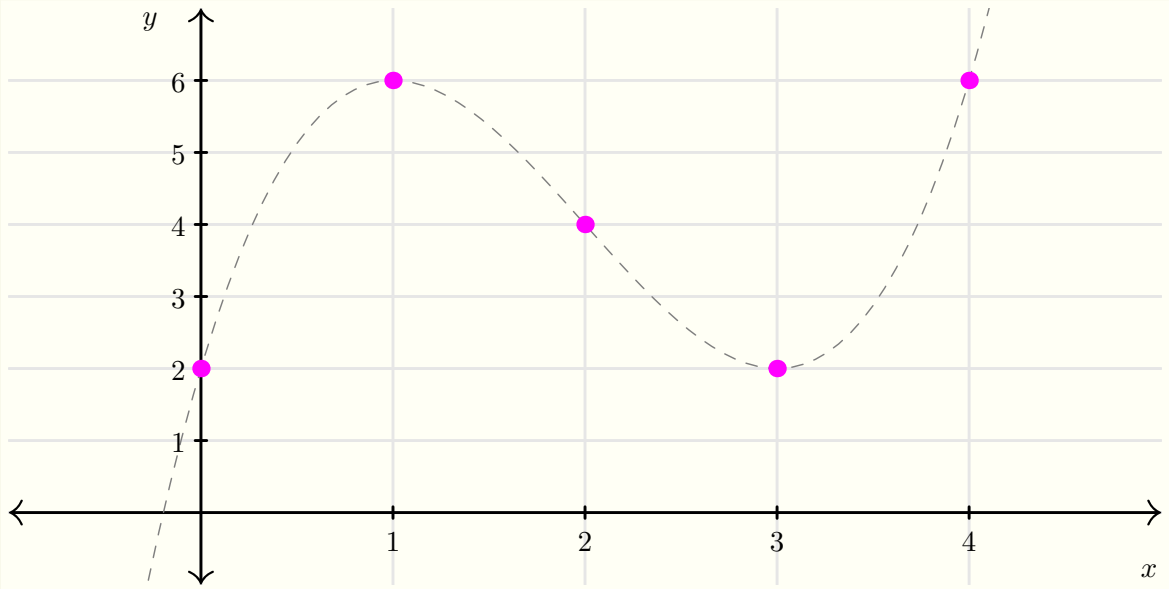
Organizando os resultados obtidos em uma tabela, temos:

n	0	1	2	3	4
$f(n)$	2	6	4	2	6

Depois de montar e analisar a tabela concluímos que

$$\min_{n \in A} f(n) = 2$$
$$\max_{n \in A} f(n) = 6$$

Construindo o gráfico da função inteira $f(n)$ fica ainda mais fácil de visualizar o máximo e mínimo local.



Exemplo 3.4.2: Vamos determinar o máximo local e mínimo local da função

$$f(n) = -n^3 + 3n^2 + 9n - 2$$

para $n \in B$, onde B é o conjunto dos números inteiros compreendidos entre -3 e 5.

Queremos determinar o mínimo e o máximo local. Vamos calcular $f(n)$ para $n \in B$.

$$\begin{aligned}
F(-3) &= -(-3)^3 + 3\cdot(-3)^2 + 9\cdot(-3) - 2 = 27 + 27 - 27 - 2 = 25\\
F(-2) &= -(-2)^3 + 3\cdot(-2)^2 + 9\cdot(-2) - 2 = 8 + 12 - 18 - 2 = 0\\
F(-1) &= -(-1)^3 + 3\cdot(-1)^2 + 9\cdot(-1) - 2 = 1 + 3 - 9 - 2 = -7\\
F(0) &= -(0)^3 + 3\cdot 0^2 + 9\cdot 0 - 2 = 0 + 0 + 0 - 2 = -2\\
F(1) &= -(1)^3 + 3\cdot 1^2 + 9\cdot 1 - 2 = -1 + 3 + 9 - 2 = 9\\
F(2) &= -(2)^3 + 3\cdot 2^2 + 9\cdot 2 - 2 = -8 + 12 + 18 - 2 = 20\\
F(3) &= -(3)^3 + 3\cdot 3^2 + 9\cdot 3 - 2 = -27 + 27 + 27 - 2 = 25\\
F(4) &= -(4)^3 + 3\cdot 4^2 + 9\cdot 4 - 2 = -64 + 48 + 36 - 2 = 18\\
F(5) &= -(5)^3 + 3\cdot 5^2 + 9\cdot 5 - 2 = -125 + 75 + 45 - 2 = -7
\end{aligned}$$

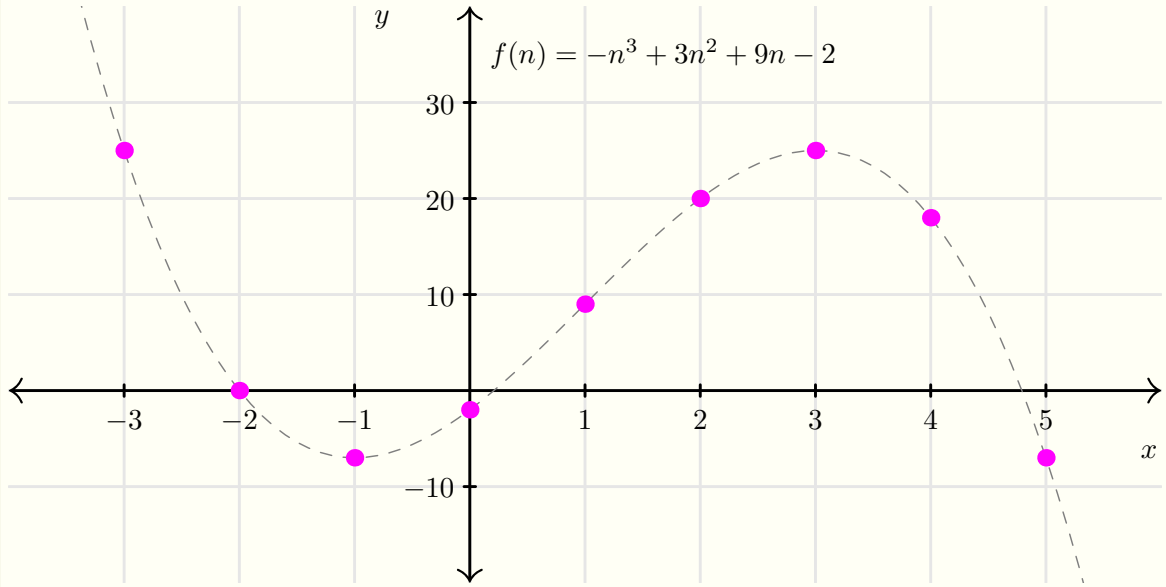
Organizando os resultados obtidos em uma tabela, temos:

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(n)$	25	0	-7	-2	9	20	25	18	-7

Depois de montar e analisar a tabela concluímos que o mínimo e o máximo local é:

$$\min_{n \in B} f(n) = -7$$
$$\max_{n \in B} f(n) = 25$$

Construindo o gráfico da função inteira $f(n)$, conseguimos visualizar de maneira bem mais clara o mínimo e o máximo local.



3.5 Máximo da Sequência de Collatz

Em toda sequência de Collatz definida de forma recursiva, para cada condição inicial $C(n)$, a sequência atinge um valor máximo, antes de eventualmente chegar a 1. Não existe um limite superior único que vale para todas as sequências, considerando sempre os números naturais ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$) como ponto de partida.

À medida que escolhemos números iniciais cada vez maiores, surgem sequências cujos valores máximos parecem crescer sem qualquer limite conhecido, revelando o comportamento imprevisível da Sequência de Collatz.

Por exemplo, a sequência iniciada em 127 realiza 46 passos até alcançar o número 1. Durante esse percurso, ela atinge o valor máximo de 4372 antes de iniciar sua descida definitiva. A Figura (3.4) ilustra a variação dos termos dessa sequência ao longo das iterações.

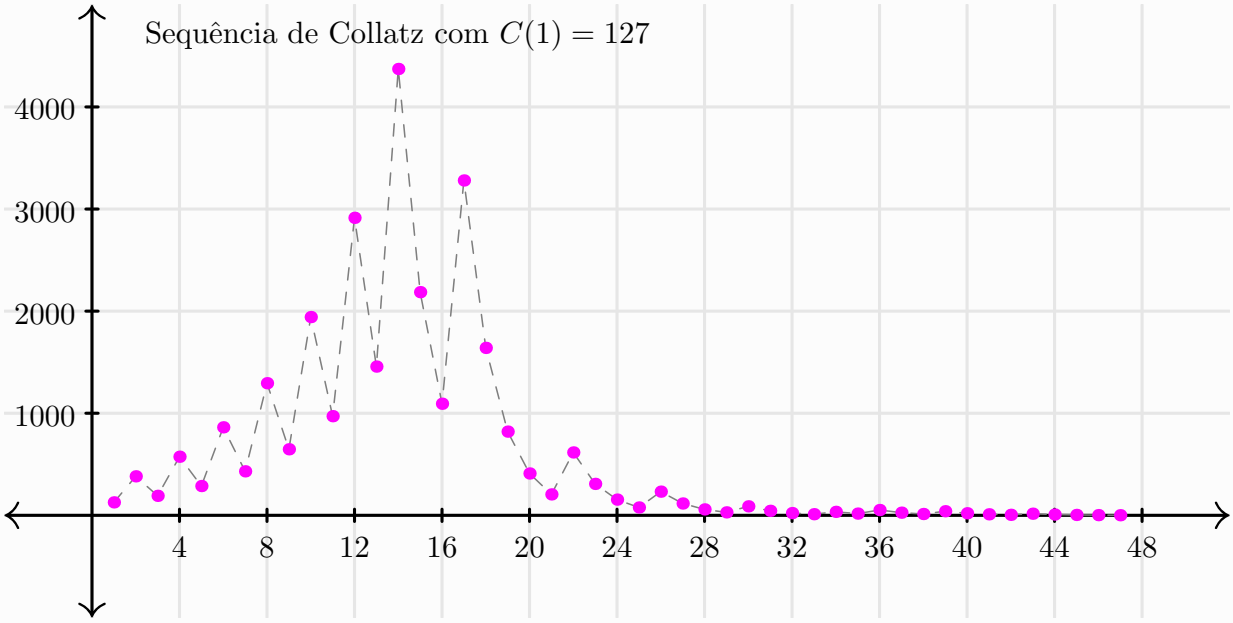


Figura 3.4: Sequência de Collatz começando em 127

Outro caso bastante interessante ocorre com a sequência iniciada em 77031, conhecida por produzir a maior quantidade de passos entre os números iniciais menores que 100 000. Nesse caso, a sequência realiza 350 passos até atingir o número 1 e alcança o valor máximo de 21 933 016 antes de iniciar sua redução. A Figura (3.5) mostra a variação dos termos dessa sequência.

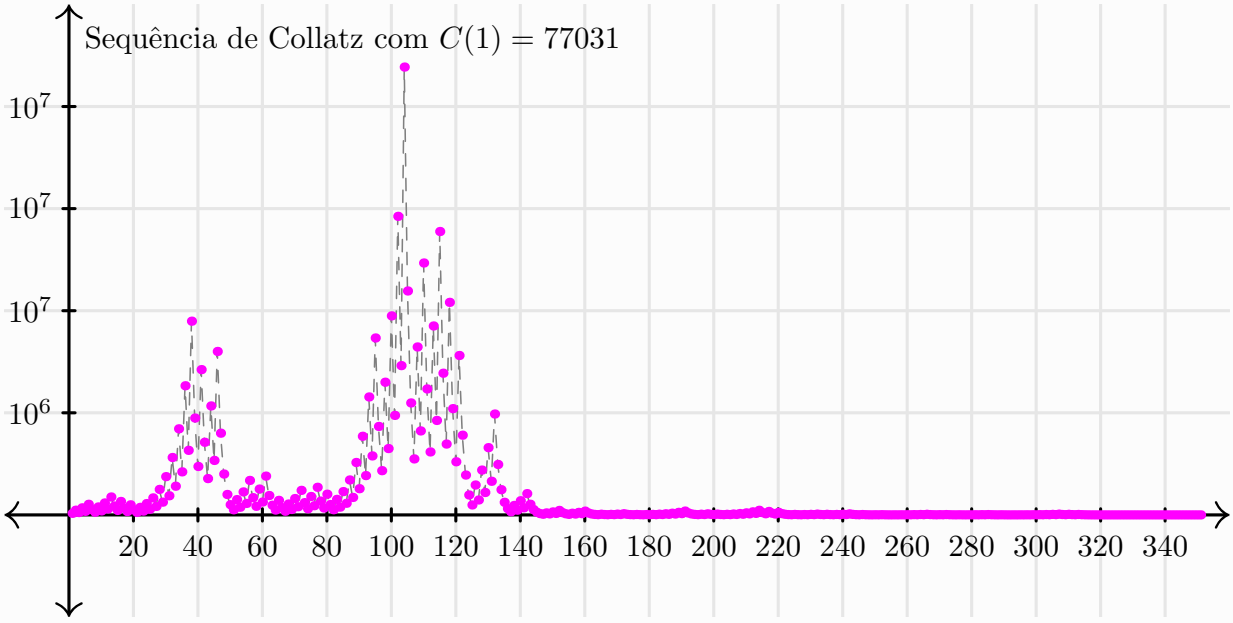


Figura 3.5: Sequência de Collatz começando em 77031

Para que possamos resolver corretamente alguns exemplos sobre valor máximo da sequência de Collatz, vamos relembrar a função recursiva da sequência estudada na Seção 2.7

$$C(n) = \begin{cases} a, & n = 1 \\ \dfrac{C(n-1)}{2}, & C(n-1) \text{ par} \\ 3C(n-1)+1, & C(n-1) \text{ ímpar.} \end{cases} \tag{3.1}$$

Exemplo 3.5.1: Considere a sequência de Collatz definida recursivamente por (3.1), com condição inicial $C(1) = 128$. Construa a sequência até alcançar o valor 1 e em seguida determine o valor máximo da sequência e o número total de passos necessários para chegar ao ciclo fixo.

$$C(n) = \begin{cases} 128, & n = 1 \\ \dfrac{C(n-1)}{2}, & C(n-1) \text{ par} \\ 3C(n-1)+1, & C(n-1) \text{ ímpar.} \end{cases}$$

O termo inicial é $C(1) = 128$ que é par. Assim,

$$C(2) = \frac{C(1)}{2} = \frac{128}{2} = 64.$$

Como 64 é par, $C(3) = \dfrac{C(2)}{2} = \dfrac{64}{2} = 32.$

Como 32 é par, $C(4) = \dfrac{C(3)}{2} = \dfrac{32}{2} = 16.$

Como 16 é par, $C(5) = \dfrac{C(4)}{2} = \dfrac{16}{2} = 8.$

Como 8 é par, $C(6) = \dfrac{C(5)}{2} = \dfrac{8}{2} = 4.$

Como 4 é par, $C(7) = \dfrac{C(6)}{2} = \dfrac{4}{2} = 2.$

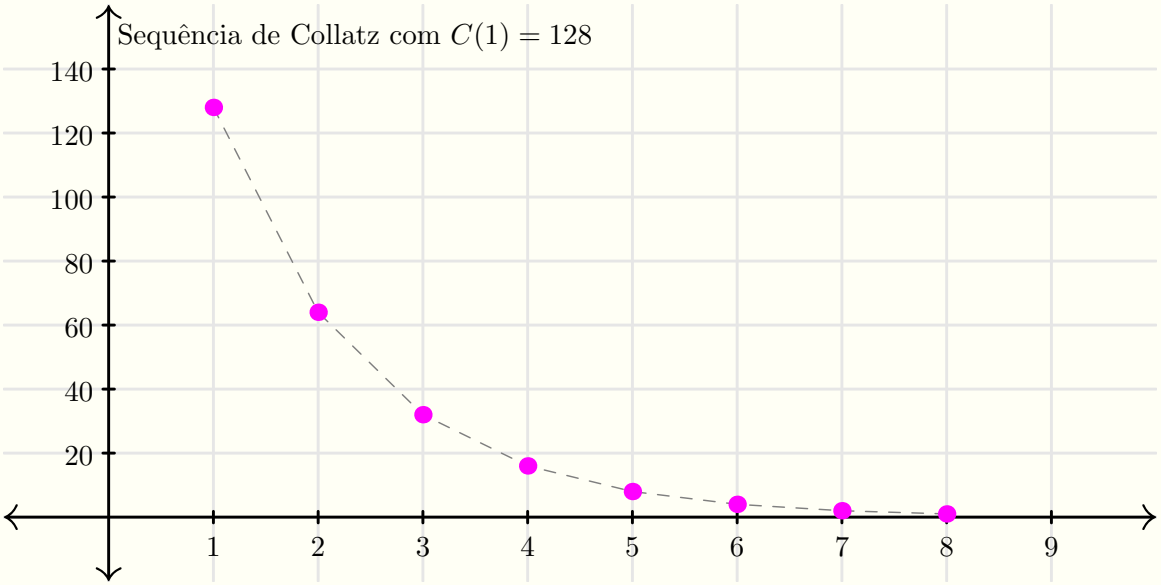
Como 2 é par, $C(8) = \dfrac{C(7)}{2} = \dfrac{2}{2} = 1.$

Assim, obtemos a seguinte sequência de Collatz:

$$(128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1)$$

Logo, o valor máximo é 128 e o número total de passos é 7.

Construindo o gráfico da função inteira $C(n)$, conseguimos visualizar de maneira bem mais clara o valor máximo da função e o número total de passos.



EXEMPLO 3.5.2: Considere a sequência de Collatz definida recursivamente por (3.1), com condição inicial $C(1) = 28$. Construa a sequência até alcançar o valor 1 e determine valor máximo.

$$C(n) = \begin{cases} 28, & n = 1 \\ \dfrac{C(n-1)}{2}, & C(n-1) \text{ par} \\ 3C(n-1) + 1, & C(n-1) \text{ ímpar}, \end{cases}$$

O termo inicial é $C(1) = 28$ que é par. Assim,

$$C(2) = \frac{C(1)}{2} = \frac{28}{2} = 14.$$

Como 14 é par $\quad C(3) = \dfrac{C(2)}{2} = \dfrac{14}{2} = 7.$

Como 7 é ímpar, $\quad C(4) = 3C(3) + 1 = 3 \cdot 7 + 1 = 22.$

Como 22 é par, $C(5) = \dfrac{C(4)}{2} = \dfrac{22}{2} = 11.$

Como 11 é ímpar, $C(6) = 3C(5) + 1 = 3 \cdot 11 + 1 = 34$

Como 34 é par, $C(7) = \dfrac{C(6)}{2} = \dfrac{34}{2} = 17$

Como 17 é ímpar, $C(8) = 3C(7) + 1 = 3 \cdot 17 + 1 = 52$

Como 52 é par, $C(9) = \dfrac{C(8)}{2} = \dfrac{52}{2} = 26$

Como 26 é par, $C(10) = \dfrac{C(9)}{2} = \dfrac{26}{2} = 13$

Como 13 é ímpar, $C(11) = 3C(10) + 1 = 3 \cdot 13 + 1 = 40$

Como 40 é par, $C(12) = \dfrac{C(11)}{2} = \dfrac{40}{2} = 20$

Como 20 é par, $C(13) = \dfrac{C(12)}{2} = \dfrac{20}{2} = 10$

Como 10 é par, $C(14) = \dfrac{C(13)}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$

Como 5 é ímpar, $C(15) = 3C(14) + 1 = 3 \cdot 5 + 1 = 16$

Como 16 é par, $C(16) = \dfrac{C(15)}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$

Como 8 é par, $C(17) = \dfrac{C(16)}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$

Como 4 é par, $C(18) = \dfrac{C(17)}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

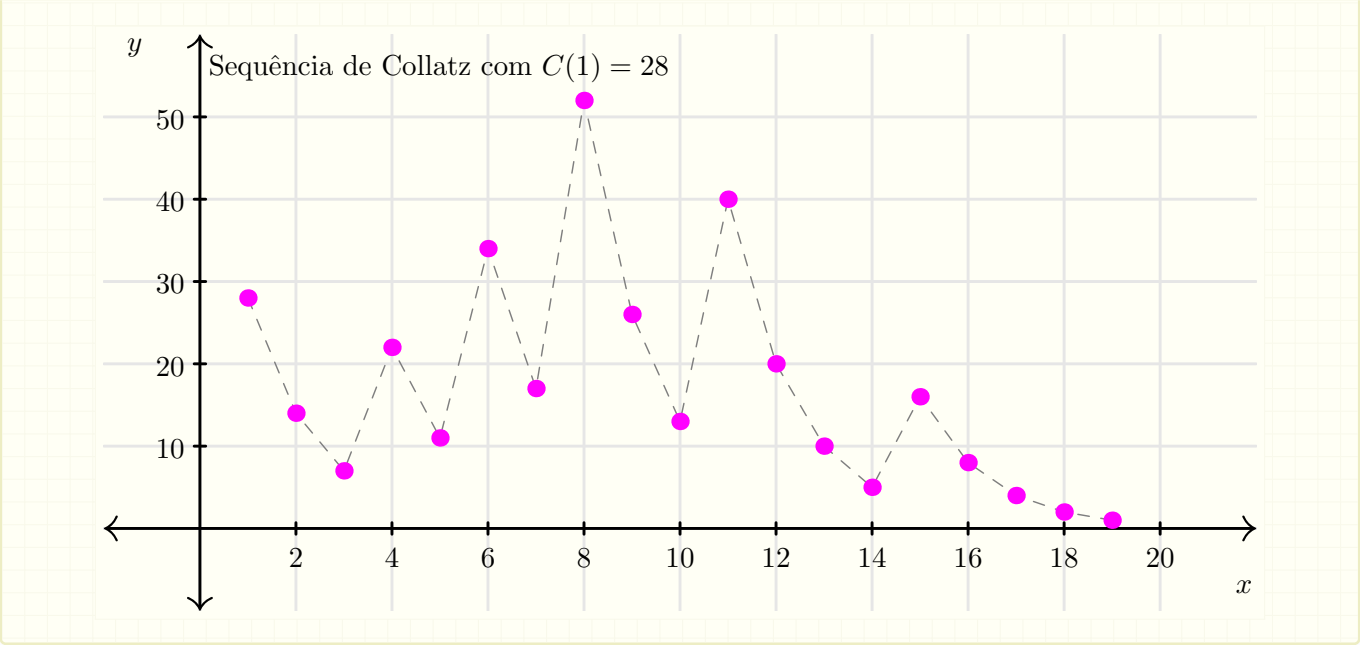
Como 2 é par, $C(19) = \dfrac{C(18)}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

Assim, a sequência de Collatz é:

$$(28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1)$$

O valor máximo é 52 e a sequência atinge o valor 1 após 18 passos.

Construindo o gráfico da função inteira $C(n)$, conseguimos visualizar de maneira bem mais clara o valor máximo da função e o número total de passos.



No estudo do valor máximo associado a uma sequência da conjectura de Collatz, determinadas escolhas para a condição inicial $C(n)$ tornam o cálculo manual extremamente trabalhoso ou até mesmo inviável, exigindo o uso de recursos computacionais. Por exemplo, ao adotar a condição inicial $C(1) = 63$, a sequência atinge o valor máximo 9232 e percorre um total de 107 passos até alcançar o ciclo fixo. De modo ainda mais expressivo, ao escolher $C(1) = 9663$, o valor máximo observado na sequência é 27114424, sendo necessários 184 passos para que a sequência chegue ao ciclo fixo.

3.6 Exercícios

1) [resp] Uma empresa fabrica camisetas e verificou que o lucro mensal, em reais, em função do número x de camisetas vendidas, é dado por

$$L(x) = -2x^2 + 400x - 5000$$

Qual é o número de camisetas que deve ser vendido para que o lucro seja máximo?

a) 50 b) 80 c) 90 d) 100 e) 120

2) [resp] O custo mensal de produção de certo produto é dado, em reais, por

$$C(x) = x^2 - 20x + 300$$

em que x é o número de unidades produzidas. Para que o custo seja mínimo, o número de unidades produzidas deve ser:

a) 5 b) 10 c) 15 d) 20 e) 25

3) [resp] (ENEM - DIGITAL 2020) Uma empresa de chocolates consultou o gerente de produção e verificou que existem cinco tipos diferentes de barras de chocolates que podem ser produzidas, com os seguintes preços no mercado:

- Barra I: R$ 2,00;
- Barra II: R$ 3,50;
- Barra III: R$ 4,00;
- Barra IV: R$ 7,00;
- Barra V: R$ 8,00.

Analisando as tendências do mercado, que incluem a quantidade vendida e a procura pelos consumidores, o gerente de vendas da empresa verificou que o lucro L com a venda de barras de chocolate é expresso pela função

$$L(x) = -x^2 + 14x - 45,$$

em que x representa o preço da barra de chocolate. A empresa decide investir na fabricação da barra de chocolate cujo preço praticado no mercado renderá o maior lucro. Nessas condições, a empresa deverá investir na produção da barra

a) I b) II c) III d) IV e) V

4) [resp] (ENEM - 2013) A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzido por um sistema a partir do instante de seu desligamento ($t = 0$) e varia de acordo com a expressão:

$$T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$$

com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39 °C. Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

a) 19,0

b) 19,8

c) 20,0

d) 38,0

e) 39,0

4

Grafos e Caminhos Mínimos

4.1 Introdução 49
4.2 Grafo 50
4.3 Caminho Mínimo 56
4.4 Uma Breve História da Teoria de Grafos 62
4.5 Exercícios 63

4.1 Introdução

A modelagem de sistemas constituídos por elementos interconectados é um dos eixos fundamentais da Matemática aplicada e discreta. Em muitos problemas contemporâneos, o interesse não está apenas nos objetos individuais, mas também nas relações estabelecidas entre eles. A teoria dos grafos fornece um arcabouço matemático rigoroso para representar, analisar e resolver problemas dessa natureza, permitindo a abstração de sistemas complexos por meio de estruturas simples e bem definidas.

Neste capítulo, introduzimos formalmente o conceito de grafo, apresentando seus elementos básicos (vértices e arestas) e discutindo sua capacidade de representar redes e relações em diferentes contextos. Essa estrutura possibilita a descrição matemática de problemas provenientes de áreas como transporte, comunicação, informática, logística e organização de dados, evidenciando o caráter interdisciplinar da teoria dos grafos.

Na sequência, abordamos o problema do caminho mínimo, que consiste em determinar a trajetória de menor custo entre dois vértices de um grafo, considerando pesos associados às arestas. Esse problema ocupa posição central na teoria dos grafos e na otimização em redes, sendo essencial para a compreensão de algoritmos e métodos utilizados na resolução de problemas reais de eficiência, planejamento e tomada de decisão.

Por fim, apresentamos uma breve contextualização histórica da teoria dos grafos, destacando o trabalho pioneiro de Leonhard Euler no século XVIII. A análise do problema das pontes de Königsberg evidencia o surgimento de uma nova forma de abstração matemática, baseada na estrutura das conexões, e marca o início de um campo que viria a se consolidar como um dos pilares da Matemática discreta moderna.

Ao longo do capítulo, busca-se articular definição formal, aplicação e contexto histórico, evidenciando a relevância teórica e prática dos grafos e dos caminhos mínimos. Dessa forma, o capítulo contribui para uma compreensão mais ampla das estruturas matemáticas associadas a redes e otimização, reforçando seu papel central na Matemática contemporânea e em suas aplicações científicas e tecnológicas.

4.2 Grafo

Um grafo é definido como um conjunto de pontos (vértices), alguns dos quais estão conectados por linhas (arestas). Quando cada aresta é associada a um valor numérico (denominado peso ou distância) o grafo passa a representar custos ou medidas necessárias para transitar entre os vértices conectados por arestas. Encontramos literaturas com nomenclaturas diferentes, algumas chamam vértices de nós e arestas de arcos.

Matematicamente, um grafo é representado por $G = (V, E)$, onde V é o conjunto de vértices e E é o conjunto de arestas. As arestas são pares de vértices (v, w), indicando que esses dois vértices estão conectados. Quando dois vértices são ligados por uma aresta, dizemos que eles são adjacentes, e a aresta é dita incidente a ambos. Duas arestas que compartilham um mesmo vértice também são chamadas adjacentes. Os dois vértices que correspondem a uma aresta são chamadas de extremidades dela.

O grafo apresentado na Figura (4.1) é composto por quatro vértices e seis arestas.

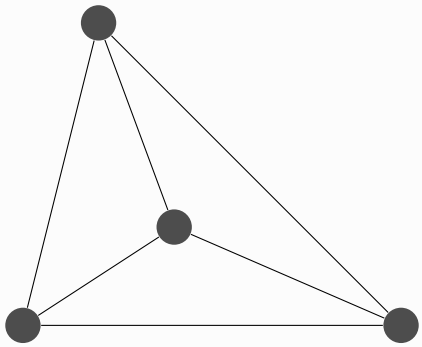
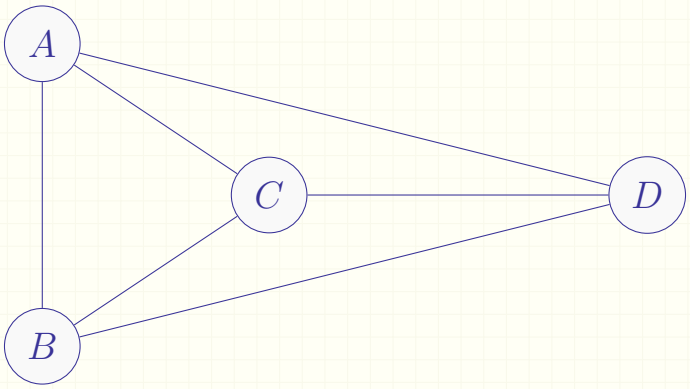


Figura 4.1: Exemplo de um grafo [5].

Nos desenhos de grafos, chamamos de estágio cada uma das etapas que compõem um processo de decisão, ou seja, em um estágio, o sistema se encontra em um determinado estado e uma escolha pode ser feita, levando-o ao estágio seguinte.

Iremos considerar o vértice inicial (origem) como estágio um e o vértice final (destino) como último estágio. Uma vez que chamarmos o vértice inicial de estágio um, todos os vértices que podem ser alcançados do inicial por uma aresta, farão parte do estágio dois. Os que precisam de duas arestas a partir do vértice inicial, farão parte do terceiro estágio, e assim por diante, até chegar ao último estágio.

Exemplo 4.2.1: Vamos encontrar os pares de vértices correspondentes a cada aresta do grafo abaixo.



Temos que:

$V = \{A, B, C, D\}$ Conjunto de vértices

As arestas desse grafo, são as formadas pelos seguintes pares de vértices:

(A, B); (A, C); (A, D); (B, C); (B, D); (C, D).

Portanto, o conjunto de arestas é:

$$E = \{(A, B); (A, C); (B, C); (B, D); (C, D); (A, D)\}$$

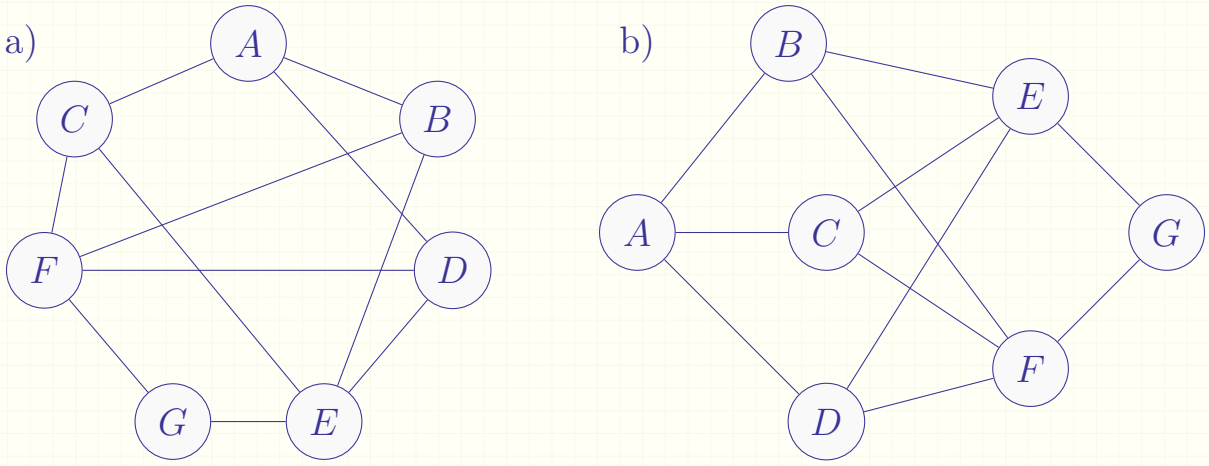
A ordem dos vértices não interfere na aresta, pois o par não é ordenado. Assim, tanto (A, B) quanto (B, A) descrevem a mesma aresta.

Dizemos que um grafo é simples, quando existe no máximo uma única aresta ligando cada par de vértice. Existindo duas ou mais arestas entre o mesmo par de vértices, o grafo passa a ser chamado de multigrafo. No exemplo 4.2.1 temos um grafo simples, pois existe uma única aresta ligando cada par de vértices do grafo. Em grafos simples, é comum representar cada aresta apenas pelo par formado pelos seus dois vértices. Assim, em vez de escrever (A, B), podemos simplesmente utilizar AB para facilitar a leitura. Pegando ainda o nosso Exemplo 4.2.1, estaria correto também, escrever conjunto de arestas como

$$E = \{AB, AC, BC, BD, CD, AD\}$$

Um mesmo grafo pode ser desenhado de diversas maneiras. O desenho em si não define o grafo, apenas o representa visualmente. O que caracteriza um grafo é o seu conjunto de vértices, seu conjunto de arestas e a correspondência entre eles, independentemente da posição em que os vértices aparecem no plano ou da forma das linhas usadas para representar as arestas.

EXEMPLO 4.2.2: Vamos verificar se os grafos abaixo são iguais.



Podemos observar que as duas figuras possuem o mesmo conjunto de vértices e

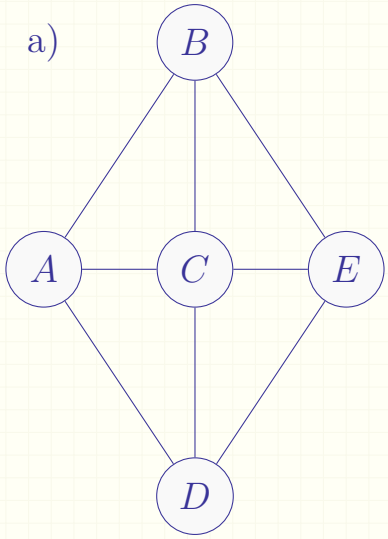
as mesmas arestas:

$$AB, AC, AD, BE, BF, CE, CF, DE, DF, EG, FG.$$

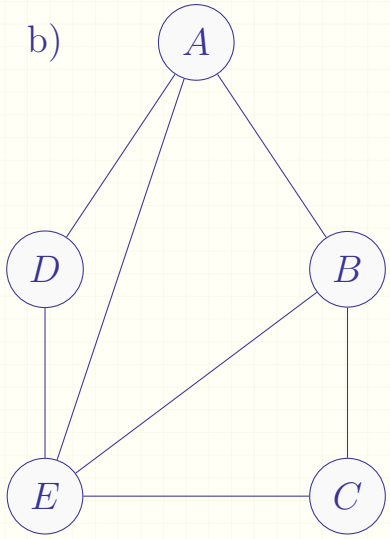
Portanto, esses grafos são iguais.

EXEMPLO 4.2.3: Vamos verificar se os grafos abaixo são iguais.

a)



b)



As duas figuras possuem o mesmo conjunto de vértices, mas não possuem as mesmas arestas, observe que a aresta AC não é comum aos dois grafos. Portanto, os dois grafos são diferentes.

É muito comum grafos representar situações concretas do nosso dia-a-dia, eles podem representar cidades, estados, locais, tarefas ou qualquer objeto relevante ao sistema estudado. No entanto, existe casos em que a estrutura natural do problema não fornece explicitamente tudo que é necessário para uma analise completa. Para superar essa restrição, introduzimos vértices adicionais, conhecidos como vértices artificiais ou vértices fictícios.

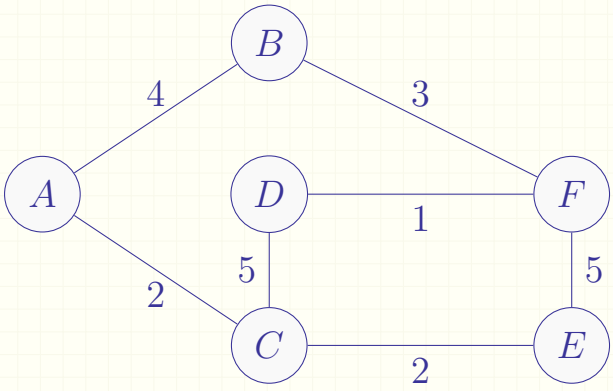
Em um grafo multiestágio, toda aresta deve ir do estágio k para o estágio $k+1$ (forma progressiva), ou do $k+1$ para o k (forma regressiva). Não pode ter aresta pulando estágio, como por exemplo, do estágio um direto para o estágio três. Acontece esse salto quando fazemos a separação dos estágios de forma errada, não respeitando a quantidade de arestas, ou quando precisamos acrescentar vértices intermediários (vértices fictícios).

Esses vértices não correspondem a elementos reais do problema original, ele têm a

função de completar a representação, tornando o grafo mais adequado ao tipo de análise que se deseja realizar.

Os vértices artificiais apresentam algumas características importantes para a modelagem de grafos. Em primeiro lugar, eles não correspondem a um elemento real do problema, mas atuam como elementos auxiliares da representação. Sua função principal é tornar visível algumas etapas que não aparecem naturalmente no enunciado do problema, sem alterar a lógica do sistema que está sendo modelado. Além disso, um vértice artificial pode ser utilizado para dividir uma única aresta em duas ou mais arestas menores, facilitando a organização do grafo em estágios, e permitindo que ele seja adaptado a um formato multiestágio. Esses vértices também podem ou não possuir pesos associados, dependendo do tipo de análise que se deseja realizar. Quando o grafo possui pesos, é comum utilizar duas estratégias: ou se distribui o peso original da aresta entre as arestas resultantes, de modo que o custo total seja preservado, ou se transfere todo o peso para apenas uma das arestas e se atribui peso zero às demais. Por fim, após a resolução do problema, esses vértices podem ser desconsiderados na interpretação final, já que sua presença serve somente para facilitar a representação e o tratamento matemático do modelo.

Exemplo 4.2.4: Vamos considera o grafo abaixo, com vários caminhos do nó A até o nó F. Vamos alinhar o grafo de modo que todos os caminho do nó A ao nó F tenham a mesma quantidade de aresta.



Caminhos possíveis do nó A até o nó F

Caminho	Passos	Distância
ACEF	$2 + 2 + 5$	9
ACDF	$2 + 5 + 1$	8
ABF	$4 + 3$	7

Observe que os caminhos passando pelo nó C tem 3 arestas, e o caminho passando pelo nó B tem apenas 2 arestas. Esse grafo está desalinhado, um ramo é mais curto. Vamos precisar que todos os caminhos de A até F tenham o mesmo número de etapas.

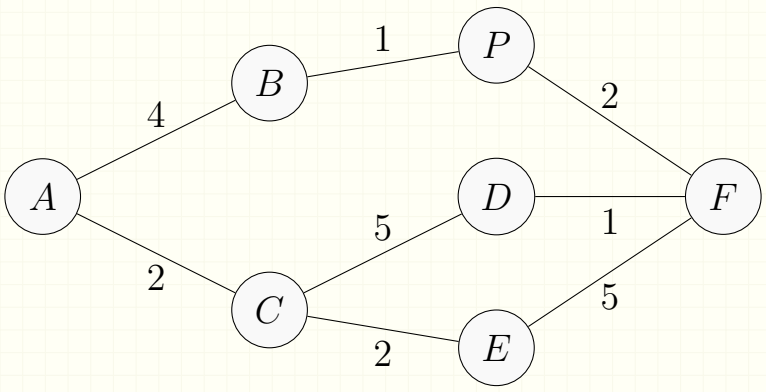
O problema esta no caminho ABF. A solução, é acrescentar um nó artificial, subdividindo a aresta BF em duas e mantendo o custo total $BF = 3$; por exemplo:

Vamos subdividir a aresta BF acrescentando um nó artificial P

$$BPF$$

Precisamos manter o custo total $BP + PF = 3$, tem várias formas dessa igualdade ser verdadeira, aqui iremos considerar os seguintes custos, $BP = 1$ e $PF = 2$.

Agora o grafo fica assim:



Todos os caminhos agora possuem 3 arestas

$$ACEF$$
$$ACDF$$
$$ABPF$$

É essencial ressaltar o caráter abstrato dessa representação. Nós diagramas de grafos a disposição dos vértices no plano não corresponde a posição espacial real; o comprimento e o formato das arestas não possuem relação direta com a extensão ou a geometria dos caminhos representados; apenas as adjacências entre vértices e os respectivos pesos das arestas possuem significados para o modelo. Essa abstração

permite concentrar a análise exclusivamente na estrutura lógica das conexões, livres de detalhes físicos que não influenciam a solução do problema. Diante disso, fica fácil ver que existe uma diferença entre grafo e um mapa que descreve o espaço físico. No mapa, as distâncias, curvas e orientações refletem a realidade geográfica. Os elementos que aparecem no mapa guarda relação direta com o mundo real, diferentemente dos grafos. Veja o mapa do Rio de Janeiro na Figura 4.2 e o grafo correspondente na Figura 4.3.



Figura 4.2: Mapa do Rio de Janeiro

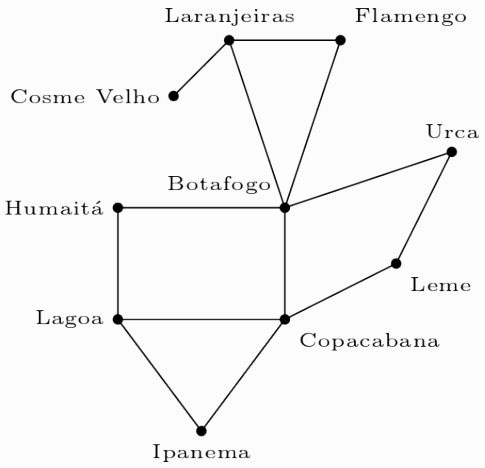


Figura 4.3: Grafo do Mapa

4.3 Caminho Mínimo

Vamos pensar nos exemplos a seguir, que envolvem situações comuns do nosso dia a dia em que precisamos escolher, entre diferentes possibilidades, aquela que melhor atende a um determinado objetivo.

- Como podemos encontrar a rota mais rápida de nossa casa para a escola?
- Como escolher a melhor rota para entregar uma pizza com o menor gasto de combustível?

Problemas como esses são conhecidos na Matemática como problemas de caminho mínimo.

O problema de caminho mínimo surge sempre que precisamos ir de um ponto a outro da maneira mais eficiente possível. A eficiência pode significar menor distância, menor tempo, menor gasto ou qualquer outra grandeza. Para estudar problemas

de caminho mínimo de forma geral e independente do contexto físico, utilizamos a linguagem dos grafos. Como exemplo ilustrativo, imagine um grafo onde os vértices representam cidades e os pesos das arestas representam quilômetros entre elas. Se você quer viajar da cidade A até a cidade F, o caminho mínimo é aquele cuja distância percorrida em quilômetros é a menor.

Na Figura (4.4), o caminho mínimo entre os vértices D e E não corresponde ao segmento direto DE. O menor percurso é obtido pelo caminho DFE, cuja distância total é igual a 14.

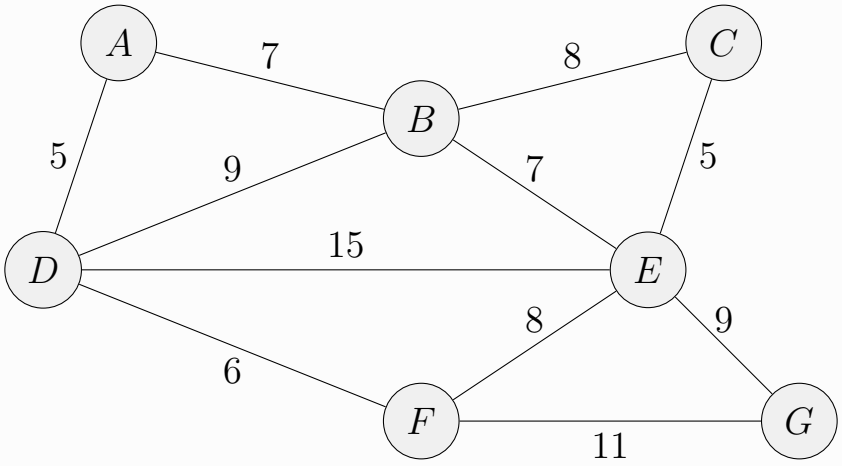
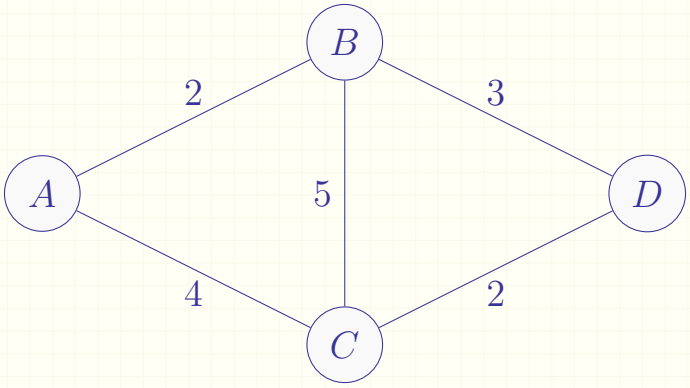


Figura 4.4: Problema do caminho mínimo [6].

O estudo de caminho mínimo aparece em diversas aplicações práticas, como sistema de navegação, planejamento de rotas, logística, redes de computadores e até mesmo em jogos. De forma geral, o objetivo é sempre o mesmo, sair de um ponto e chegar a outro gastando o mínimo possível, seja tempo, dinheiro, energia ou alguma outra medida.

Exemplo 4.3.1: Imagine que precisamos ir de um ponto A até um ponto D, e existem vários caminhos possíveis, com diferentes distâncias entre os vértices. Queremos escolher o caminho mais curto entre A e D.



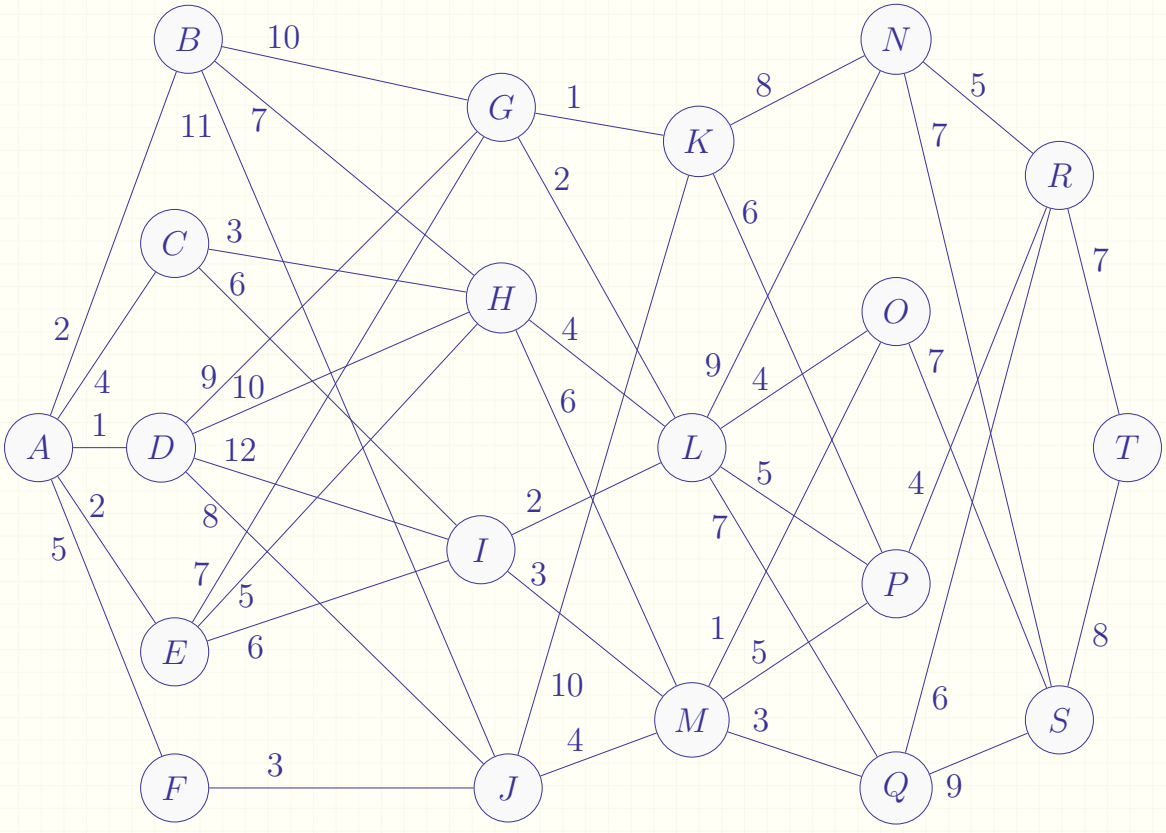
Como temos uma quantidade pequena de adjacências entre os vértices, conseguimos fazer sem muita dificuldade todas as combinações possíveis dos caminhos que ligam A até D. Vamos dispor essas combinações de caminhos e suas respectivas distâncias na tabela abaixo.

Caminho	Passos	Distância
ABD	$2 + 3$	5
ACD	$4 + 2$	6
ABCD	$2 + 5 + 2$	9
ACBD	$4 + 5 + 3$	12

Depois de analisarmos todas as opções concluímos que o caminho mínimo é ABD, com distância total 5

$$\min_{A \in D} f(c) = 5$$

Exemplo 4.3.2: Vamos imaginar que precisamos nos deslocar de um ponto A até um ponto T, e dispomos de vários caminhos possíveis, com diferentes distâncias entre os vértices. Qual o caminho mais curto entre A e T?



Aqui temos uma grande quantidade de vértices e arestas com muitas adjacências entre os vértices, o que torna o processo de citar todas as combinações possíveis dos caminhos que ligam A até T muito demorado e trabalhoso. Abaixo temos uma tabela com todas essas combinações

Caminho	Passos	Distância
ABGKNRT	$2+10+1+8+5+7$	33
ABGKNST	$2+10+1+8+7+8$	36
ABGKPRT	$2+10+1+6+4+7$	30
ABGLNST	$2+10+2+9+7+8$	38
ABGLOST	$2+10+2+4+7+8$	33
ABGLQST	$2+10+2+7+9+8$	38

Caminho	Passos	Distância
ABHLNST	$2+7+4+9+7+8$	37
ABHLOST	$2+7+4+4+7+8$	32
ABHLQST	$2+7+4+7+9+8$	37

Caminho	Passos	Distância
ABJKNRT	$2+11+10+8+5+7$	43
ABJKNST	$2+11+10+8+7+8$	46
ABJKPRT	$2+11+10+6+4+7$	40
ABJMOST	$2+11+4+1+7+8$	33
ABJMPRT	$2+11+4+5+4+7$	33
ABJMQRT	$2+11+4+3+6+7$	33
ABJMQST	$2+11+4+3+9+8$	37

Caminho	Passos	Distância
ACHLNRT	$4+3+4+9+5+7$	32
ACHLNST	$4+3+4+9+7+8$	35
ACHLOST	$4+3+4+4+7+8$	30
ACHLPRT	$4+3+4+5+4+7$	27
ACHLQRT	$4+3+4+7+6+7$	31
ACHLQST	$4+3+4+7+9+8$	35
ACHMPRT	$4+3+6+5+4+7$	29
ACHMQRT	$4+3+6+3+6+7$	29

Caminho	Passos	Distância
ACILNST	$4+6+2+9+7+8$	36
ACILQST	$4+6+2+7+9+8$	36
ACIMOST	$4+6+3+1+7+8$	29
ACIMQST	$4+6+3+3+9+8$	33

Caminho	Passos	Distância
ADGKNST	$1+9+1+8+7+8$	34
ADGLNST	$1+9+2+9+7+8$	36
ADGLOST	$1+9+2+4+7+8$	31
ADGLQST	$1+9+2+7+9+8$	36

Caminho	Passos	Distância
ADHLNRT	$1+10+4+9+5+7$	36
ADHLPRT	$1+10+4+5+4+7$	31
ADHLQRT	$1+10+4+7+6+7$	35
ADHMPRT	$1+10+6+5+4+7$	33
ADHMQRT	$1+10+6+3+6+7$	33

Caminho	Passos	Distância
ADILNST	$1 + 12 + 2 + 9 + 7 + 8$	39
ADILPRT	$1 + 12 + 2 + 5 + 4 + 7$	31
ADILQRT	$1 + 12 + 2 + 7 + 6 + 7$	35
ADILQST	$1 + 12 + 2 + 7 + 9 + 8$	39
ADIMOST	$1 + 12 + 3 + 1 + 7 + 8$	32
ADIMQST	$1 + 12 + 3 + 3 + 9 + 8$	36

Caminho	Passos	Distância
ADJKNST	$1 + 8 + 10 + 8 + 7 + 8$	42
ADJMOST	$1 + 8 + 4 + 1 + 7 + 8$	29
ADJMQST	$1 + 8 + 4 + 3 + 9 + 8$	33

Caminho	Passos	Distância
AEGKNRT	$2 + 7 + 1 + 8 + 5 + 7$	30
AEGKPRT	$2 + 7 + 1 + 6 + 4 + 7$	27

Caminho	Passos	Distância
AEHLNST	$2 + 5 + 4 + 9 + 7 + 8$	35
AEHLOST	$2 + 5 + 4 + 4 + 7 + 8$	30
AEHLQST	$2 + 5 + 4 + 7 + 9 + 8$	35

Caminho	Passos	Distância
AEILNST	$2 + 6 + 2 + 9 + 7 + 8$	34
AEILPRT	$2 + 6 + 2 + 5 + 4 + 7$	26
AEILQRT	$2 + 6 + 2 + 7 + 6 + 7$	30
AEILQST	$2 + 6 + 2 + 7 + 9 + 8$	34
AEIMOST	$2 + 6 + 3 + 1 + 7 + 8$	27
AEIMQST	$2 + 6 + 3 + 3 + 9 + 8$	31

Caminho	Passos	Distância
AFJKNRT	$5+3+10+8+5+7$	38
AFJKNST	$5+3+10+8+7+8$	41
AFJKPRT	$5+3+10+6+4+7$	35
AFJMOST	$5+3+4+1+7+8$	28
AFJMPRT	$5+3+4+5+4+7$	28
AFJMQRT	$5+3+4+3+6+7$	28
AFJMQST	$5+3+4+3+9+8$	32

Analisando todas as opções concluímos que o caminho mínimo é

$$AEILPRT$$

com distância total 26

$$\min_{A \in T} f(c) = 26$$

Como podemos notar, a medida que o problema de caminho mínimo vai ficando mais complexo, vai se tornando também inviável a sua resolução pelo método apresentado até agora, que em resumo é a citação de todas as combinações possíveis dos caminhos de um ponto a outro. Por esse motivo, surge a necessidade de estudarmos um novo método de resolução para esses tipos de problemas apresentados até aqui. A Programação Dinâmica facilita a resolução de alguns tipos de problemas de mínimo e máximo, no Capitulo 5, estudaremos sobre esse importantíssimo método.

4.4 Uma Breve História da Teoria de Grafos

O primeiro estudo que se tem notícia da teoria dos grafos, surgiu no século XVIII, quando Leonhard Euler (1707 – 1783) publicou um artigo com o título Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis que traduzindo significa "A solução de um problema relacionado à geometria de posição". Esse artigo trazia a solução de um questionamento urbano da época, os habitantes da cidade de Konigsberg (atualmente Kaliningrado) na Prussia queriam saber se erá possível determinar um trajeto para atravessar todas as setes pontes do Rio Pregel e retornar ao local de partida, sem passar duas vezes pela mesma ponte.

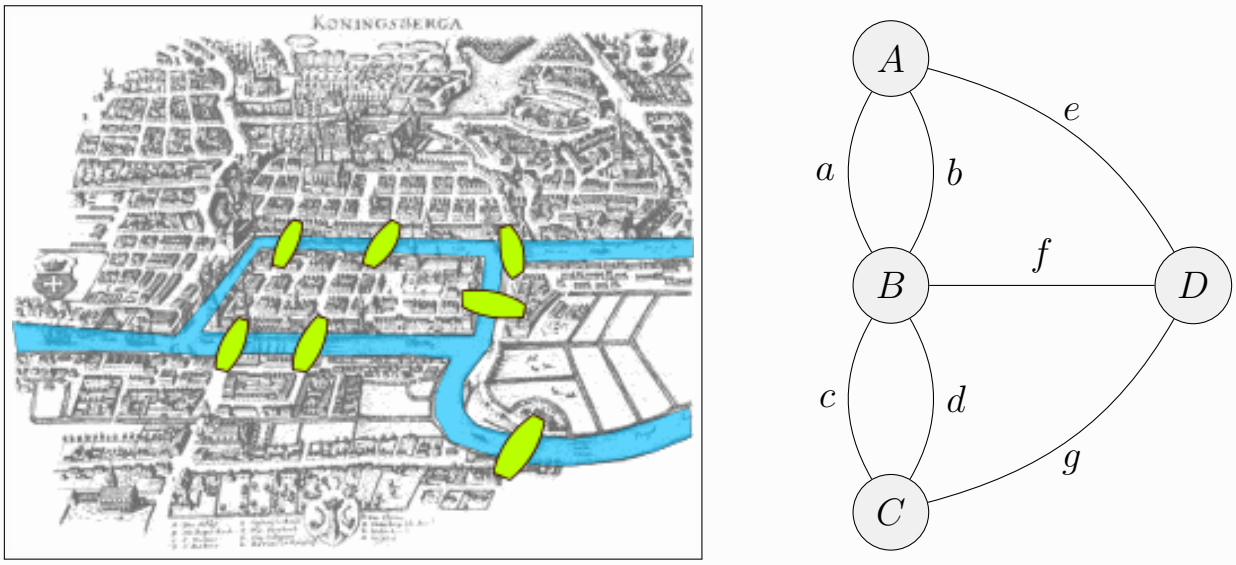


Figura 4.5: Ilustração do problema das pontes de Konigsberg [7].

Euler adotou uma representação abstrata do problema, na qual a posição real de cada região do mapa não era levada em consideração. Cada uma das regiões foi representada por um vértice, enquanto cada uma das sete pontes foi representada por uma linha curva, denominada aresta. Nessa modelagem, as arestas não possuem qualquer relação com o comprimento real das pontes, servindo apenas para indicar quais regiões estão conectadas entre si.

Com isso, Euler construiu um diagrama em grafo associado ao problema, no qual os vértices A, B, C e D representam as quatro partes da cidade, conectadas por sete pontes, denotadas por a, b, c, d, e, f, g. A partir desse modelo, Euler demonstrou que é impossível iniciar o percurso em uma das quatro regiões da cidade e retornar ao ponto de partida atravessando cada ponte exatamente uma única vez.

Além disso, ele provou que um percurso desse tipo só é possível quando cada região da cidade é ligada a um número par de arestas, que representam as pontes. Esse resultado é considerado como a primeira referência que se tem em Teoria de Grafos.

4.5 Exercícios

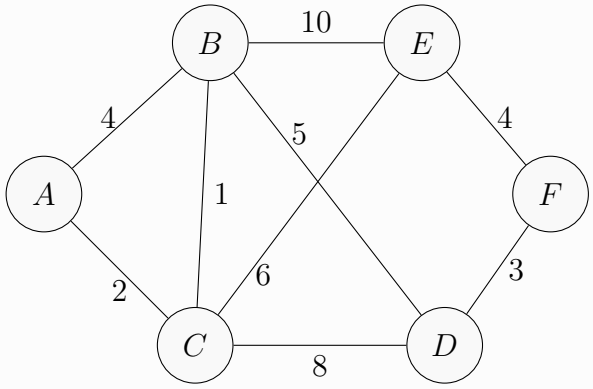
1) [resp] São estabelecidas ligações cósmicas entre os nove planetas do sistema solar. Foguetes viajam ao longo das seguintes rotas: Terra-Mercúrio, Plutão-Vênus, Terra-Plutão, Plutão-Mercúrio, Mercúrio-Vênus, Urânio-Netuno, Netuno-Saturno, Saturno-Júpiter, Júpiter-Marte e Marte-Urânio. Um viajante pode ir da Terra para Marte? [8]

2) [resp] Em Interiorana existem 15 telefones. Eles podem ser conectados por fios de modo que cada telefone seja conectado a exatamente cinco

outros?

3) [resp] Um determinado reinado tem 100 cidades e saem quatro estradas de cada uma delas. Quantas estradas existem ao todo neste reinado?

4) [resp] Um estudante do 3º Ano Médio precisa sair de sua casa, representada pelo ponto A, e chegar até a escola, representada pelo ponto F. Para isso, ele pode passar por algumas ruas intermediárias. O tempo de caminhada, em minutos, entre dois pontos conectados está indicado abaixo:



Qual é o menor tempo possível para o estudante ir de sua casa até a escola? Qual caminho ele deve seguir?

5

Programação Dinâmica

5.1 Introdução 65
5.2 Definição 66
5.3 Uma Breve História da Programação Dinâmica 88
5.4 Exercícios 89

5.1 Introdução

Problemas de otimização estão presentes em diversas áreas da matemática, da computação e das ciências aplicadas, frequentemente envolvendo a tomada de decisões em múltiplas etapas. Em muitos desses problemas, uma solução global eficiente pode ser construída a partir da combinação de soluções ótimas de subproblemas menores. A programação dinâmica surge exatamente nesse contexto, oferecendo uma metodologia sistemática para decompor problemas complexos e resolvê-los de forma estruturada e eficiente.

Neste capítulo, apresentamos os fundamentos da programação dinâmica, destacando seus princípios centrais, como a decomposição em subproblemas, a sobreposição de estados e o princípio da optimalidade. Essa abordagem permite reduzir significativamente o custo computacional de problemas que, à primeira vista, apresentariam crescimento exponencial quando resolvidos por métodos diretos ou puramente recursivos.

A programação dinâmica estabelece conexões naturais com conteúdos previamente estudados, como funções recursivas, grafos e problemas de caminho mínimo, evidenciando sua posição como uma ponte entre a Matemática discreta e a Computação. Ao interpretar decisões sucessivas como estados e transições, muitos problemas podem ser representados por estruturas em estágios, nas quais a solução ótima é construída progressivamente.

Ao longo do capítulo, busca-se enfatizar não apenas os procedimentos algorítmicos, mas também a compreensão conceitual do método, permitindo ao leitor reconhecer situações em que a programação dinâmica é aplicável e formular modelos adequados para sua utilização. Dessa forma, o capítulo contribui para o desenvolvimento de uma visão analítica e estratégica na resolução de problemas de otimização.

Ao final, espera-se que o leitor compreenda a programação dinâmica como uma ferramenta versátil, capaz de integrar teoria matemática, modelagem e eficiência computacional, desempenhando um papel fundamental na resolução de problemas contemporâneos em diferentes áreas do conhecimento.

5.2 Definição

A Programação Dinâmica é uma técnica de otimização que divide um problema complexo em partes menores e mais simples. A ideia principal é enxergar o problema como um processo que acontece em etapas denominadas de estrutura multiestágios que orienta o processo de decisão.

A programação dinâmica busca dividir o problema principal em vários subproblemas chamados de estágios. Cada estágio é resolvido uma única vez, e sua solução ótima (política ótima) é guardada para ser consultada futuramente, caso seja necessária novamente. Isso evita repetições de cálculo e torna o método mais eficiente.

Um ponto importante é que a programação dinâmica é uma função recursiva, que liga a solução ótima de cada estágio construindo a solução ótima do problema inteiro. Ou seja, resolvendo bem cada pequeno pedaço, conseguimos resolver bem o problema completo.

Em cada estágio de um problema resolvido por programação dinâmica, temos várias opções de escolhas, para sua conclusão, chamadas de decisões. A situação em que o

processo se encontra dentro do estágio é chamada de estado. Quando estamos em um estágio, precisamos tomar uma decisão. Essa decisão pode mudar ou não o estado do processo, mas sempre provoca uma passagem do estado atual para um estado futuro.

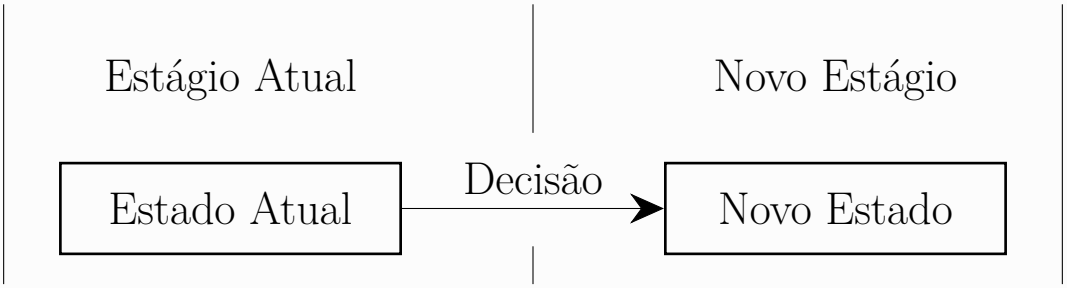
Em resumo, programação dinâmica baseia-se em estágios e estados, quebramos o problema em estágios e aí vamos analisando possíveis estados nesses estágios.

Estágio Processo de decisão que deve ser tomada segundo um certo número de etapas. Em um caminho até a escola, cada esquina onde decidimos para onde virar pode ser visto como um estágio.

Estado É a situação atual do problema em um estágio. Em problemas de caminho mínimo, o estado é o nó onde estamos.

Decisão É a opção escolhida entre várias possibilidades em um determinado estágio. Em um caminho, a decisão pode ser ir para a esquerda ou para a direita.

Política É o conjunto de decisões que diz o que deve ser feito em cada estágio do problema. Em um caminho com várias esquinas, a política diz que direção seguir em cada esquina.



A programação dinâmica fundamenta-se no princípio de otimalidade de Bellman (Richard Bellman, 1957), que diz:

Principio de otimalidade de Bellman

Uma política ótima tem a propriedade de que, quaisquer que sejam o estado inicial e a decisão inicial, as decisões restantes devem constituir uma política ótima em relação ao estado resultante da primeira decisão.

Vamos resolver os problemas usando a relação de recursão progressiva, onde a decisão em um estágio se baseia em decisões de estágios anteriores. Para que essa relação funcione, é necessário conhecer previamente o valor da função e um estágio inicial. Esse valor conhecido é a condição de contorno, chamada também de condição inicial.

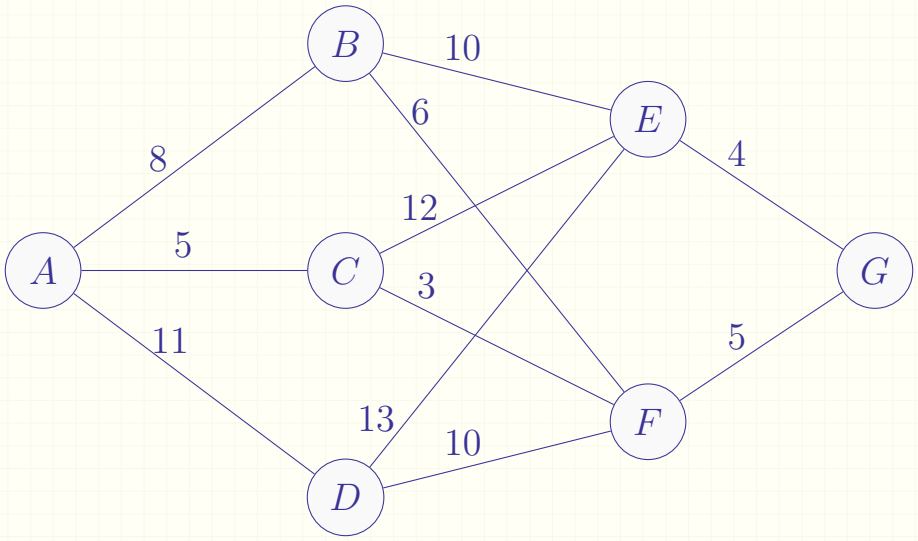
Definimos $z(i)$ como a menor distância entre o nó inicial até o nó i, se o grafo puder ser organizado em estágios, podemos aplicar programação dinâmica para calcular z usando a função recursiva

$$z(j) = \begin{cases} 0, & j \text{ é o primeiro nó} \\ \min\limits_{(i,j)\in\mathcal{K}}\{c(i,j)\}, & j \text{ demais nós} \end{cases} \tag{5.1}$$

Com $c(i,j) = z(i) + d(i,j)$, onde:

- i e j são os identificadores dos nós. Algumas vezes usaremos números e outras letras, nesse caso teríamos $i, j = A, B, C, \ldots$.
- $\mathcal{K}$ é o conjunto de todos os caminhos no grafo. Aqui $(i,j) \in \mathcal{K}$ significa que o caminho (i,j) existe no grafo, isto é, existe um caminho partindo do nó i até o nó j.
- $z(i)$ é a menor distância entre o primeiro nó e o nó i.
- $d(i,j)$ é a distância do nó i até o nó j.
- $c(i,j)$ é a menor distância do nó inicial até o nó j, passando obrigatoriamente por i.
- $z(j)$ será a menor distância entre o primeiro nó e o nó j.

Exemplo 5.2.1: Dado o grafo abaixo, vamos calcular $d(A,B)$; $d(A,C)$; $d(A,D)$; $d(B,E)$; $d(C,E)$; $d(C,F)$; $d(E,G)$ e $d(F,G)$.

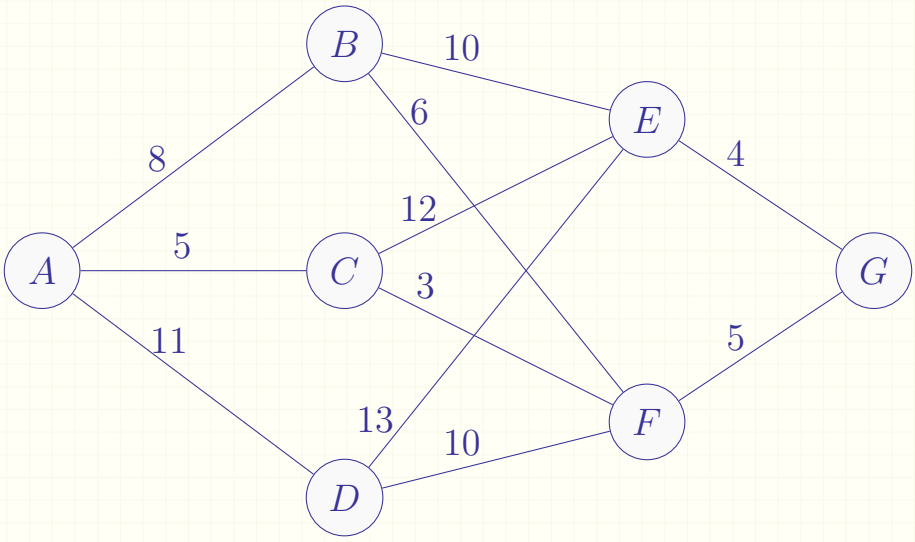


Sabemos que $d(i,j)$ é a distância entre o nó i e o nó j. Assim, temos que:

$$d(A,B) = 8,$$

$d(A,C) = 5$,
$d(A,D) = 11$,
$d(B,E) = 10$,
$d(C,E) = 12$,
$d(C,F) = 3$,
$d(E,G) = 4$,
$d(F,G) = 5$.

Exemplo 5.2.2: Dado o grafo,



se $z(B) = 8$, $z(C) = 5$ e $z(D) = 11$, vamos calcular o $z(E)$.

Temos três caminhos chegando no nó E, como foi visto anteriormente, sabemos que calcular $z(E)$ é encontrar a menor distância entre o nó A que é o primeiro nó e o nó E que nessa situação colocada é o último nó.

Para podermos calcular $z(E)$ corretamente, vamos precisar primeiramente calcular as seguintes distâncias $d(B, E)$, $d(C, E)$ e $d(D, E)$:

$d(B, E) = 10$,
$d(C, E) = 12$,
$d(D, E) = 13$.

Agora vamos calcular as três distâncias do nó A ao nó E:

$$z(B) + d(B,E) = 8 + 10 = 18,$$
$$z(C) + d(C,E) = 5 + 12 = 17,$$
$$z(D) + d(D,E) = 11 + 13 = 24.$$

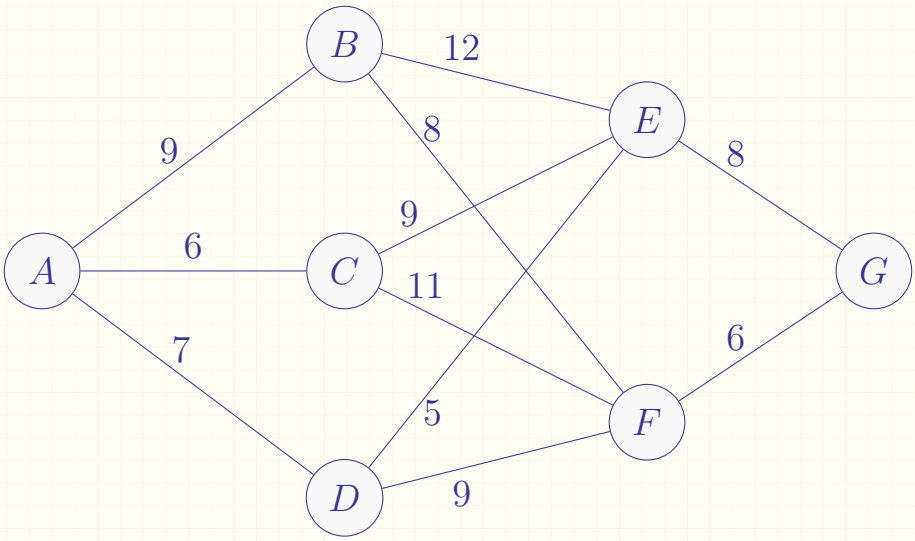
Conseguimos calcular agora $c(A,E)$ que é o menor caminho (distância) entre o nó A e o nó E

$$\begin{aligned} c(A,E) &= \{\ z(B) + d(B,E);\ z(C) + d(C,E);\ z(D) + d(D,E)\ \} \\ &= \{\ 18, 17, 24\ \} \end{aligned}$$

Da função recursiva (4.1), sabemos que

$$\begin{aligned} z(E) &= \min\{c(A,E)\} \\ &= 17 \qquad \text{(passando por C)} \end{aligned}$$

Exemplo 5.2.3: Suponhamos que precisamos escolher o caminho mais curto entre duas cidades. A figura abaixo apresenta todos os possíveis caminhos entre a cidade de partida localizada no nó A e a cidade de destino localizada no nó G. Os nós B a F localizados entre a cidade de partida e a de destino, representam cidades intermediárias. Qual o caminho mínimo de A a G?



Queremos encontrar a menor distância entre o nó A e o nó G, para isso, vamos

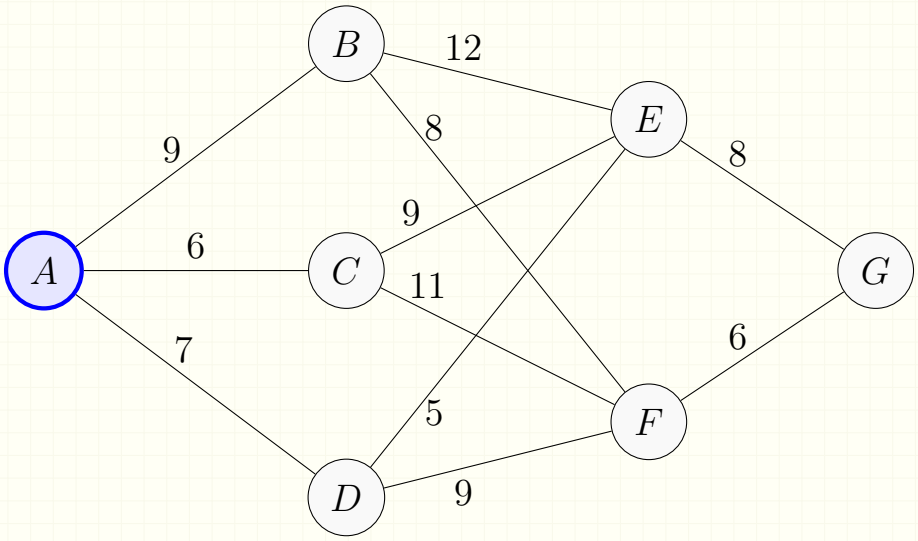
utilizar a função recursiva

$$z(j) = \begin{cases} 0, & j \text{ é o primeiro nó} \\ \min\limits_{(i,j)\in\mathcal{K}}\{c(i,j)\}, & j \text{ demais nós} \end{cases}$$

Onde $c(i,j) = z(i) + d(i,j)$

queremos calcular $z(G)$. Para isso precisamos calcular a distância do nó inicial A até cada nó do grafo, isto é, queremos calcular $z(j)$ para $j = A, B, C, \ldots, G$.

Condição inicial



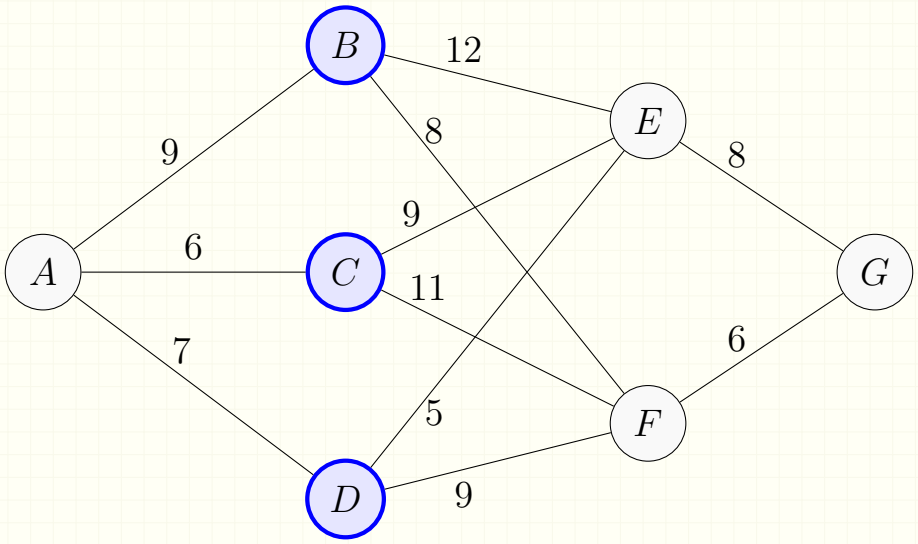
Como A é o primeiro nó usamos o primeiro caso da função recursiva obtendo

$$z(A) = 0$$

Para todos os nós diferentes de A a função recursiva se torna

$$z(j) = \min_{(i,j)\in\mathcal{K}}\{c(i,j)\}$$

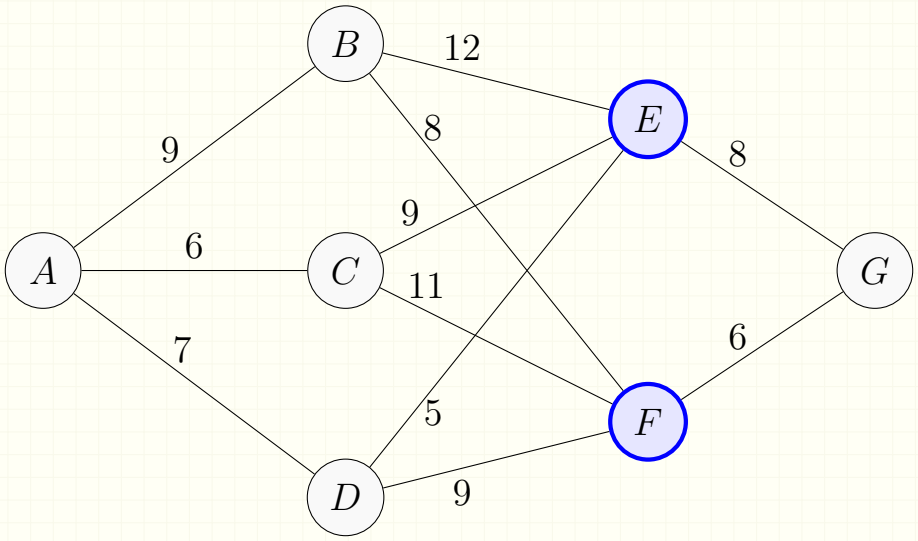
Estágio 1



Como os nós do primeiro estágio, B, C e D, estão ligados diretamente ao nó A existe um único caminho entre A e cada um deles, assim o índice i assume apenas o valor A e o índice j assume os valores B, C e D e temos:

$$
\begin{aligned}
z(B) &= \min\{c(A,B)\} \\
&= \min\{z(A) + d(A,B)\} \\
&= \min\{0+9\} \\
&= 9 \quad \text{(passando por A)} \\
z(C) &= \min\{c(A,C)\} \\
&= \min\{z(A) + d(A,C)\} \\
&= \min\{0+6\} \\
&= 6 \quad \text{(passando por A)} \\
z(D) &= \min\{c(A,D)\} \\
&= \min\{z(A) + d(A,D)\} \\
&= \min\{0+7\} \\
&= 7 \quad \text{(passando por A)}
\end{aligned}
$$

Estágio 2



Neste estágio queremos calcular $z(E)$ e $z(F)$, vamos começar por $z(E)$. Podemos chegar a E pelos nós B, C ou D, então precisamos calcular as distâncias por todos os caminhos de A até E passando por esses nós

$$c(B,E) = z(B) + d(B,E) = 9 + 12 = 21$$
$$c(C,E) = z(C) + d(C,E) = 6 + 9 = 15$$
$$c(D,E) = z(D) + d(D,E) = 7 + 5 = 12$$

Observamos agora que a menor dessas distâncias é 12, que acontece quando chegamos a E passando por D, então

$$z(E) = \min\{\ c(B,E);\ c(C,E);\ c(D,E)\ \} = 12 \text{ (passando por } D).$$

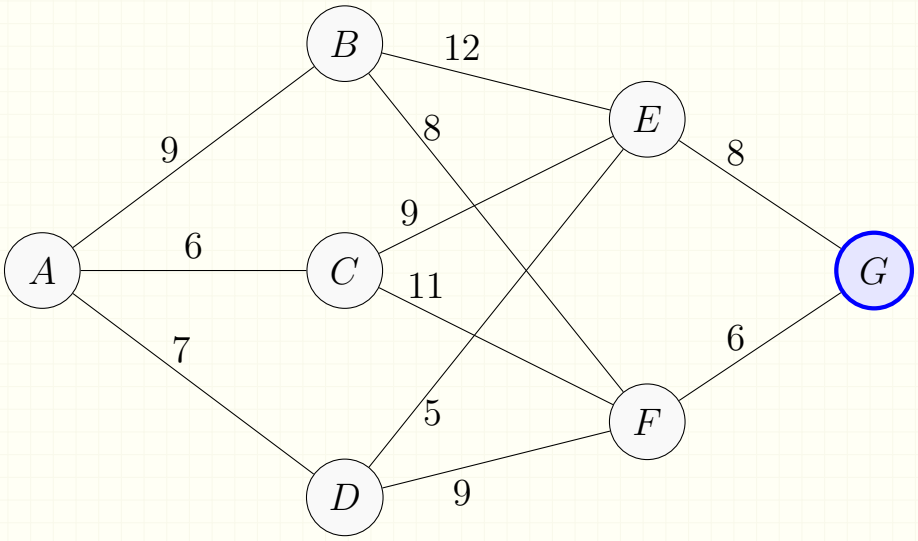
Uma vez calculado $z(E)$, vamos calcular $z(F)$. Podemos chegar a F pelos nós B, C ou D, então precisamos calcular as distâncias por todos os caminhos de A até F passando por esses nós

$$c(B,F) = z(B) + d(B,F) = 9 + 8 = 17$$
$$c(C,F) = z(C) + d(C,F) = 6 + 11 = 17$$
$$c(D,F) = z(D) + d(D,F) = 7 + 9 = 16$$

Podemos observar que a menor dessas distâncias é 16, que acontece quando chegamos a F passando por D, então

$$z(F) = \min\{\ c(B,F);\ c(C,F);\ c(D,F)\ \} = 16 \text{ (passando por } D).$$

Estágio 3



Chegamos ao nosso objetivo, que é calcular $Z(G)$, ou seja, a distância do nó inicial A ao último nó G. Podemos chegar a G pelos nós E ou F, então:

$$c(E,G) = z(E) + d(E,G) = 12 + 8 = 20$$
$$c(F,G) = z(F) + d(F,G) = 16 + 6 = 22$$

Observamos agora que a menor dessas distâncias é 20, que acontece quando chegamos a G passando por E, então

$$z(G) = \min\{\, c(E,G); c(F,G)\} = 20 \text{ (passando por } E).$$

Para uma melhor observação do que aconteceu em cada estágio e assim determinarmos com maior facilidade a solução ótima ou se preferirmos podemos chamar de política ótima, vamos fazer um resumo de cada um dos estágios.

Resumo do estágio 1:

$z(B) = 9$ (passando por A)
$z(C) = 6$ (passando por A)
$z(D) = 7$ (passando por A)

Resumo do estágio 2:

$z(E) = 12$ (passando por D)
$z(F) = 16$ (passando por D)

Resumo do estágio 3:

$z(G) = 20$ (passando por E)

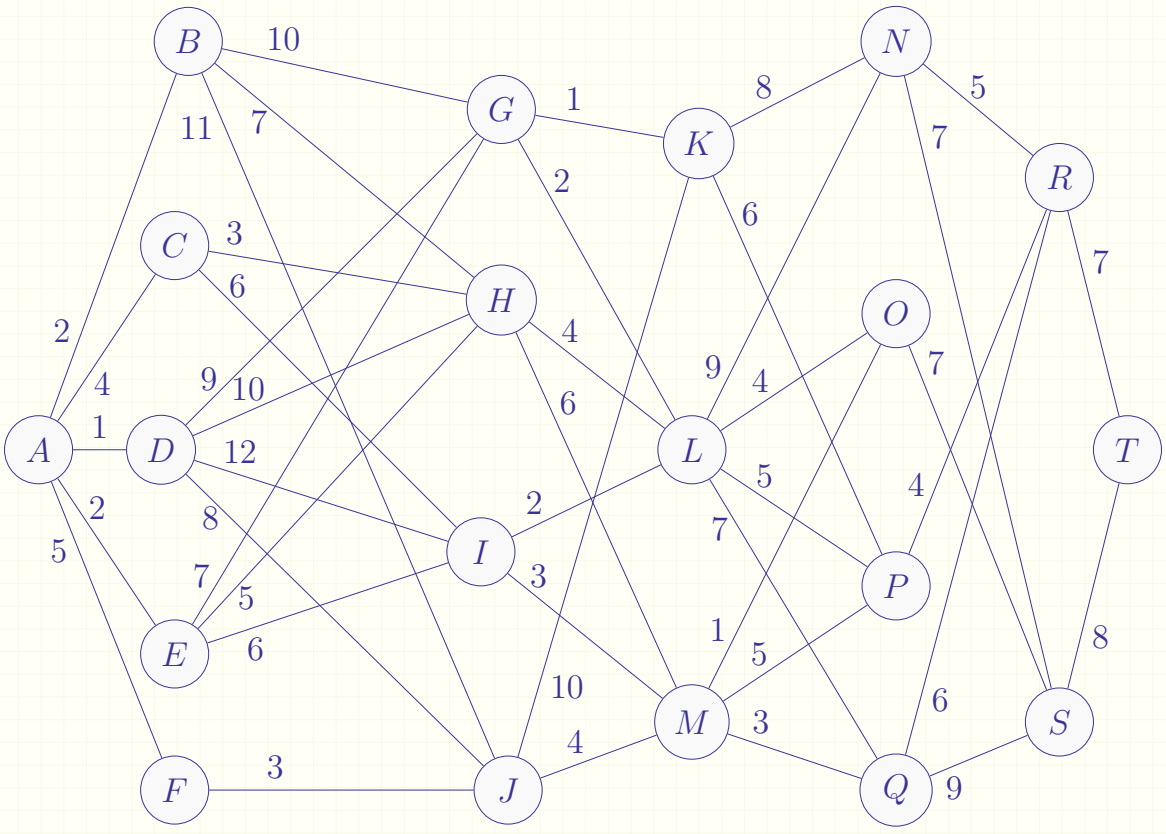
Para determinarmos o caminho ótimo, a melhor forma de chegar em G é passando por E, que por sua vez é passando por D que por sua vez é passando por A.

Assim, a nossa política ótima é

$ADEG$

Uma vez que já introduzimos o conceito de programação dinâmica, vamos resolver o Exemplo 4.3.2 utilizando esses conceitos, e poderemos notar que a resolução fica menos trabalhosa e mais simples.

Exemplo 5.2.4: Vamos imaginar que precisamos nos deslocar de um ponto A até um ponto T, e dispomos de vários caminhos possíveis, com diferentes distâncias entre os vértices. Qual o caminho mais curto entre A e T?



Para que possamos encontrar a menor distância entre o nó A e o nó T, vamos utilizar a função recursiva

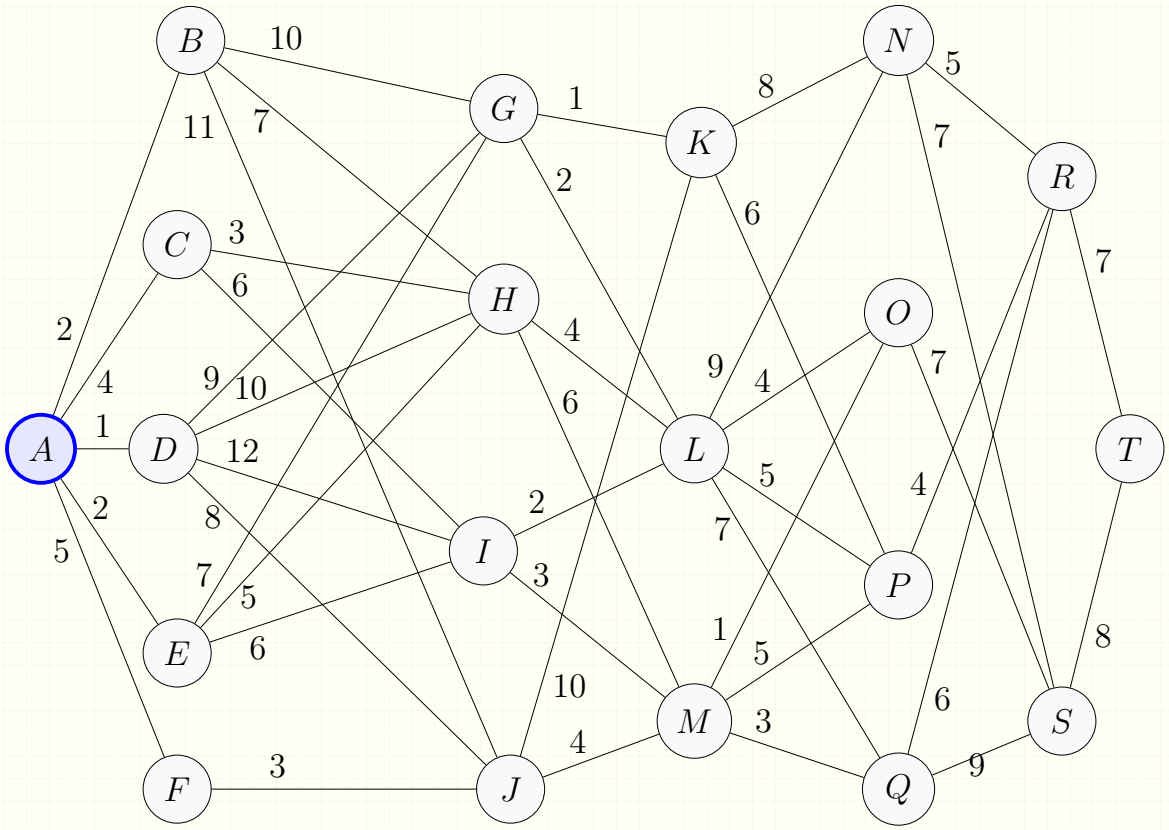
$$z(j) = \begin{cases} 0, & j \text{ é o primeiro nó} \\ \min\limits_{(i,j)\in\mathcal{K}} \{c(i,j)\}, & j \text{ demais nós} \end{cases}$$

Onde $c(i,j) = z(i) + d(i,j)$

Para que possamos calcular $z(T)$, será necessário calcular a distância do nó inicial A até cada um dos nós do grafo, ou seja, teremos que calcular $z(j)$ para $j = A, B, C ... T$.

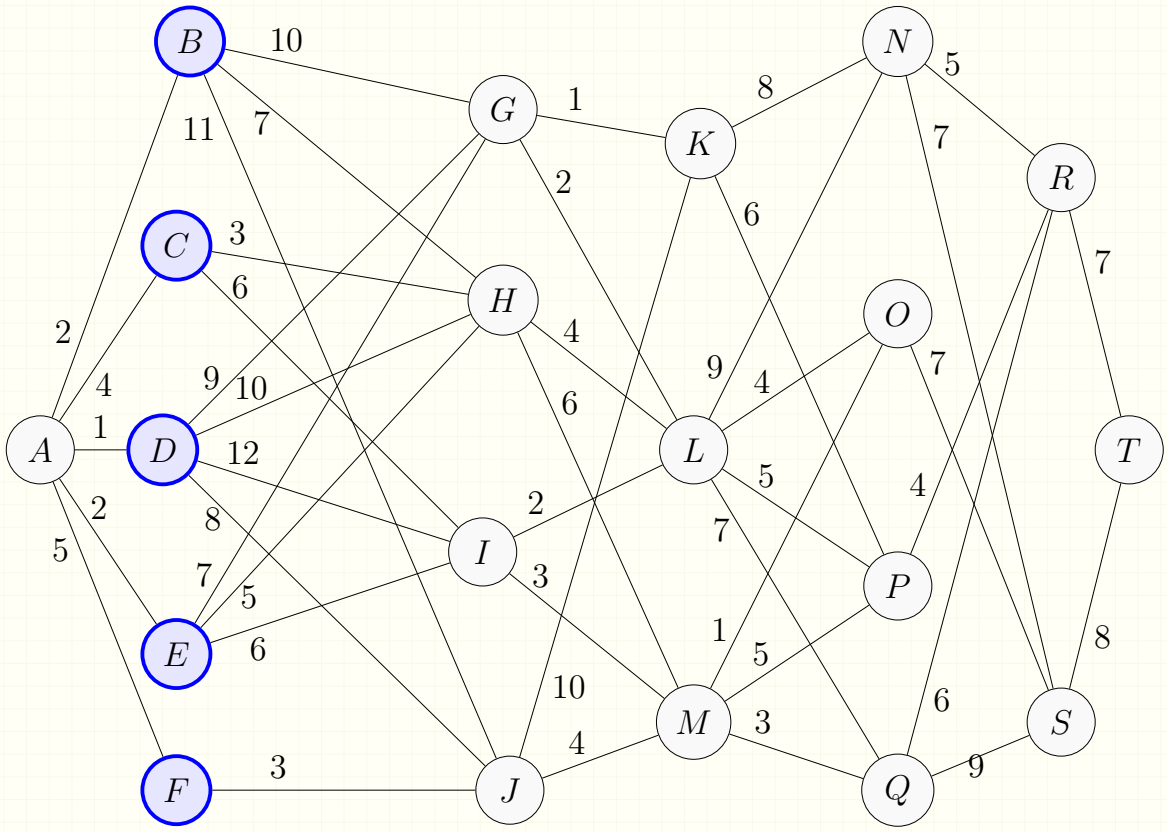
Condição inicial

$z(A) = 0$ passando por $\varnothing$



Primeiro estágio

Nesse primeiro estágio, o índice i assume apenas o valor A e o índice j assume os valores B, C, D, E e F.



Vamos então calcular $z(B)$, $z(C)$, $z(D)$, $z(E)$ e $z(F)$

$$z(B) = \min\{c(A,B)\} = \min\{z(A) + d(A,B)\} = \min\{0+2\} = 2 \text{ (por } A)$$
$$z(C) = \min\{c(A,C)\} = \min\{z(A) + d(A,C)\} = \min\{0+4\} = 4 \text{ (por } A)$$
$$z(D) = \min\{c(A,D)\} = \min\{z(A) + d(A,D)\} = \min\{0+1\} = 1 \text{ (por } A)$$

$$\begin{aligned} z(B) &= \min\{c(A,B)\} = \min\{z(A) + d(A,B)\} \\ &= \min\{0+2\} = 2 \text{ (passando por } A) \\ z(C) &= \min\{c(A,C)\} = \min\{z(A) + d(A,C)\} \\ &= \min\{0+4\} = 4 \text{ (passando por } A) \\ z(D) &= \min\{c(A,D)\} = \min\{z(A) + d(A,D)\} \\ &= \min\{0+1\} = 1 \text{ (passando por } A) \end{aligned}$$

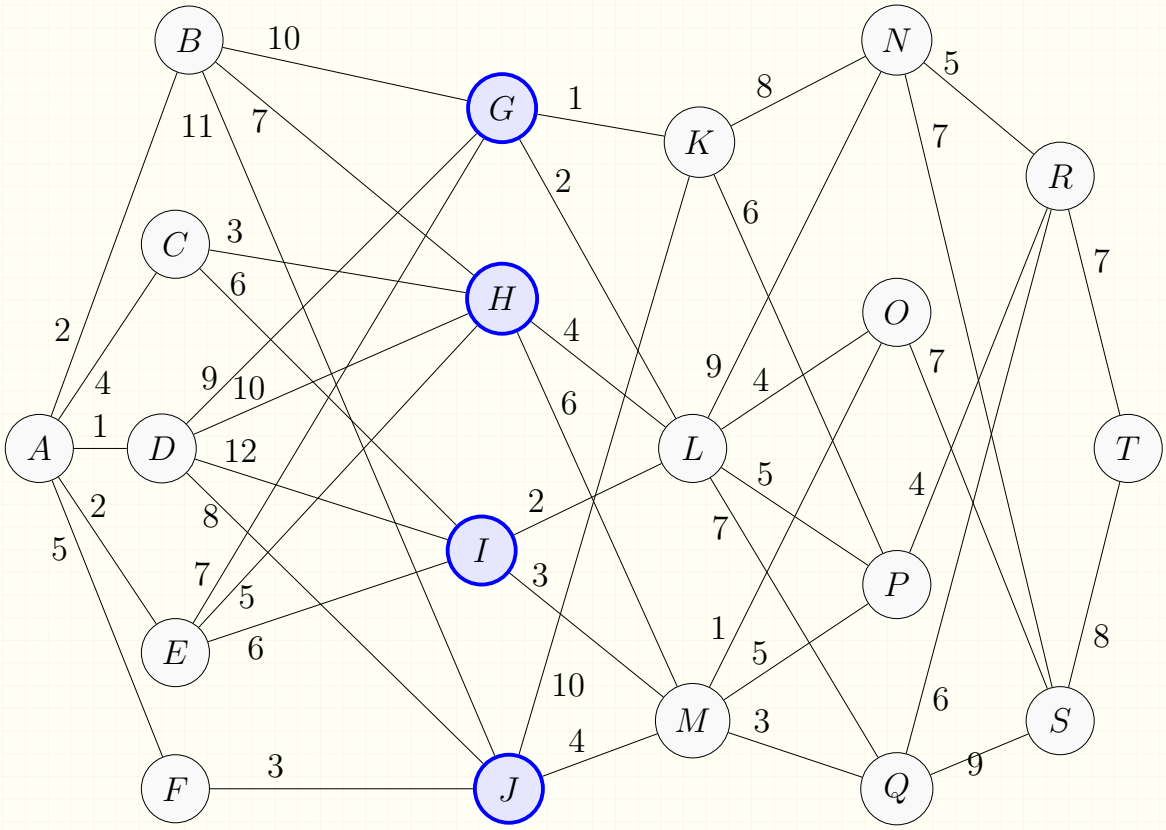
$$\begin{aligned} z(E) &= \min\{c(A,E)\} = \min\{z(A) + d(A,E)\} \\ &= \min\{0+2\} = 2 \text{ (passando por } A) \end{aligned}$$

$$z(F) = \min\{c(A,F)\} = \min\{z(A) + d(A,F)\}$$

$$= \min\{0 + 5\} = 5 \text{ (passando por } A)$$

Secundo estágio

Nesse segundo estágio, vamos calcular $z(G)$, $z(H)$, $z(I)$ e $z(J)$.



Calculando $z(G)$

Podemos chegar a G pelos nós B, D ou E, precisamos então calcular as distâncias de todos os caminhos de A até G passando por esses nós

$$c(B, G) = z(B) + d(B, G) = 2 + 10 = 12$$
$$c(D, G) = z(D) + d(D, G) = 1 + 9 = 10$$
$$c(E, G) = z(E) + d(E, G) = 2 + 7 = 9$$

A menor dessas distâncias é 9 passando por E, então

$$z(G) = \min\{\ c(B, G);\ c(D, G);\ c(E, G)\ \} = 9 \text{ (passando por } E).$$

Calculando $z(H)$

Podemos chegar ao nó H pelos nós B, C, D ou E, vamos calcular as distâncias de todos os caminhos de A até H passando por esses nós.

$$c(B,H) = z(B) + d(B,H) = 2 + 7 = 9$$
$$c(C,H) = z(C) + d(C,H) = 4 + 3 = 7$$
$$c(D,H) = z(D) + d(D,H) = 1 + 10 = 11$$
$$c(E,H) = z(E) + d(E,H) = 2 + 5 = 7$$

A menor distância é 7 passando por C ou E, como as distâncias são iguais, não importa qual usamos, assim vamos escolher E, obtendo

$$z(H) = \min\{\ c(B,H);\ c(C,H);\ c(D,H);\ c(E,H)\ \} = 7 \text{ (por } E).$$

Calculando $z(I)$

Podemos chegar ao nó I pelos nós C, D ou E, vamos calcular as distâncias de todos os caminhos de A até I passando por esses nós.

$$c(C,I) = z(C) + d(C,I) = 4 + 6 = 10$$
$$c(D,I) = z(D) + d(D,I) = 1 + 12 = 13$$
$$c(E,I) = z(E) + d(E,I) = 2 + 6 = 8$$

A menor dessas distâncias é 8, que acontece quando chegamos a I passando por E, então

$$z(I) = \min\{\ c(C,I);\ c(D,I);\ c(E,I)\ \} = 8 \text{ (passando por } E).$$

Calculando $z(J)$

Podemos chegar ao nó J pelos nós B, D ou F, vamos calcular as distâncias de todos os caminhos de A até J passando por esses nós.

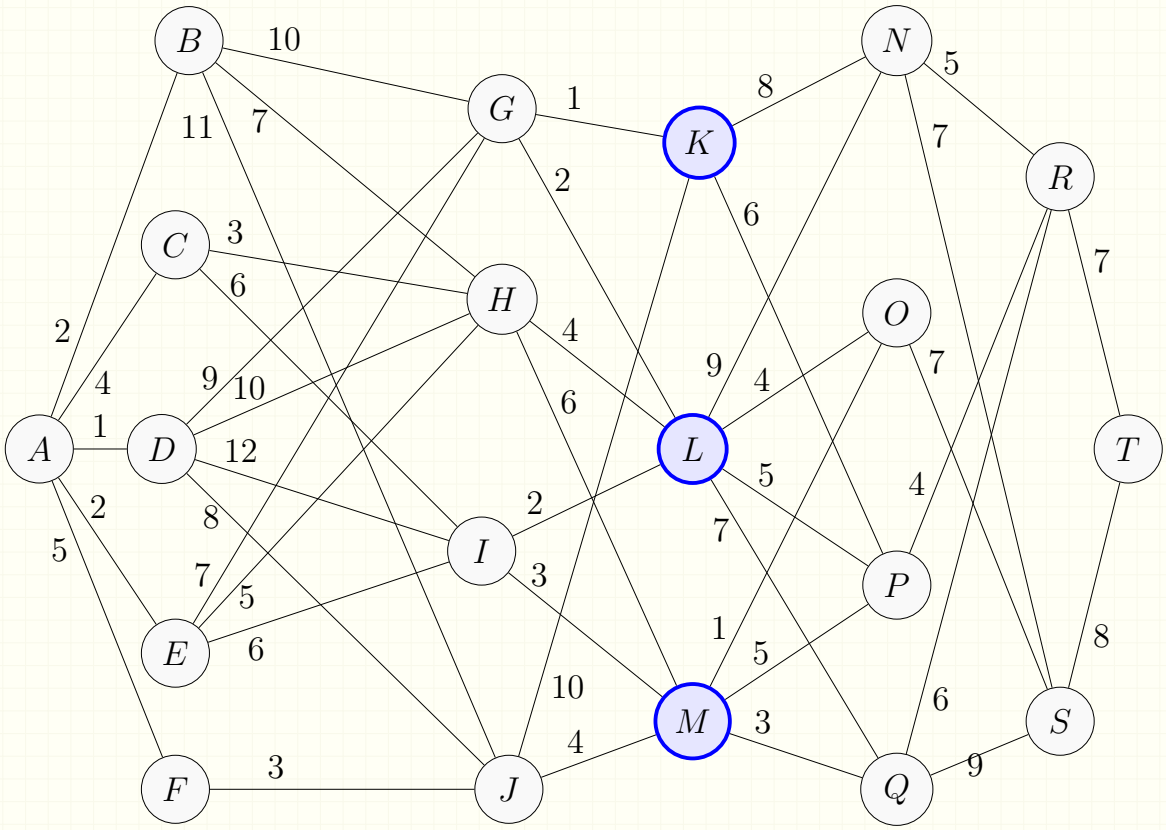
$$c(B,J) = z(B) + d(B,J) = 2 + 11 = 13$$
$$c(D,J) = z(D) + d(D,J) = 1 + 8 = 9$$
$$c(F,J) = z(F) + d(F,J) = 5 + 3 = 8$$

A menor dessas distâncias é 8, que acontece quando chegamos a J passando por F, então

$$z(j) = \min\{\ c(B,J);\ c(D,J);\ c(F,J)\ \} = 8 \text{ (passando por } F).$$

Terceiro estágio

Nesse terceiro estágio, vamos calcular $z(K)$, $z(L)$ e $z(M)$.



Calculando $z(K)$

Podemos chegar ao nó K pelos nós G ou J, vamos calcular as distâncias de todos os caminhos de A até k passando por esses nós.

$$c(G,K) = z(G) + d(G,K) = 9 + 1 = 10$$
$$c(J,K) = z(J) + d(J,K) = 8 + 10 = 18$$

A menor dessas distâncias é 10, que acontece quando chegamos a K passando por G, então

$$z(k) = \min\{\ c(G,K);\ c(J,K);\ \} = 10 \text{ (passando por } G).$$

Calculando $z(L)$

Podemos chegar ao nó L pelos nós G, H ou I, vamos calcular as distâncias de todos os caminhos de A até L passando por esses nós.

$$c(G, L) = z(G) + d(G, L) = 9 + 2 = 11$$
$$c(H, L) = z(H) + d(H, L) = 7 + 4 = 11$$
$$c(I, L) = z(I) + d(I, L) = 8 + 2 = 10$$

A menor dessas distâncias é 10, que acontece quando chegamos a L passando por I, então

$$z(L) = \min\{\ c(G, L);\ c(H, L);\ c(I, L)\} = 10 \text{ (passando por } I).$$

Calculando $z(M)$

Podemos chegar ao nó M pelos nós H, I ou J, vamos calcular as distâncias de todos os caminhos de A até M passando por esses nós.

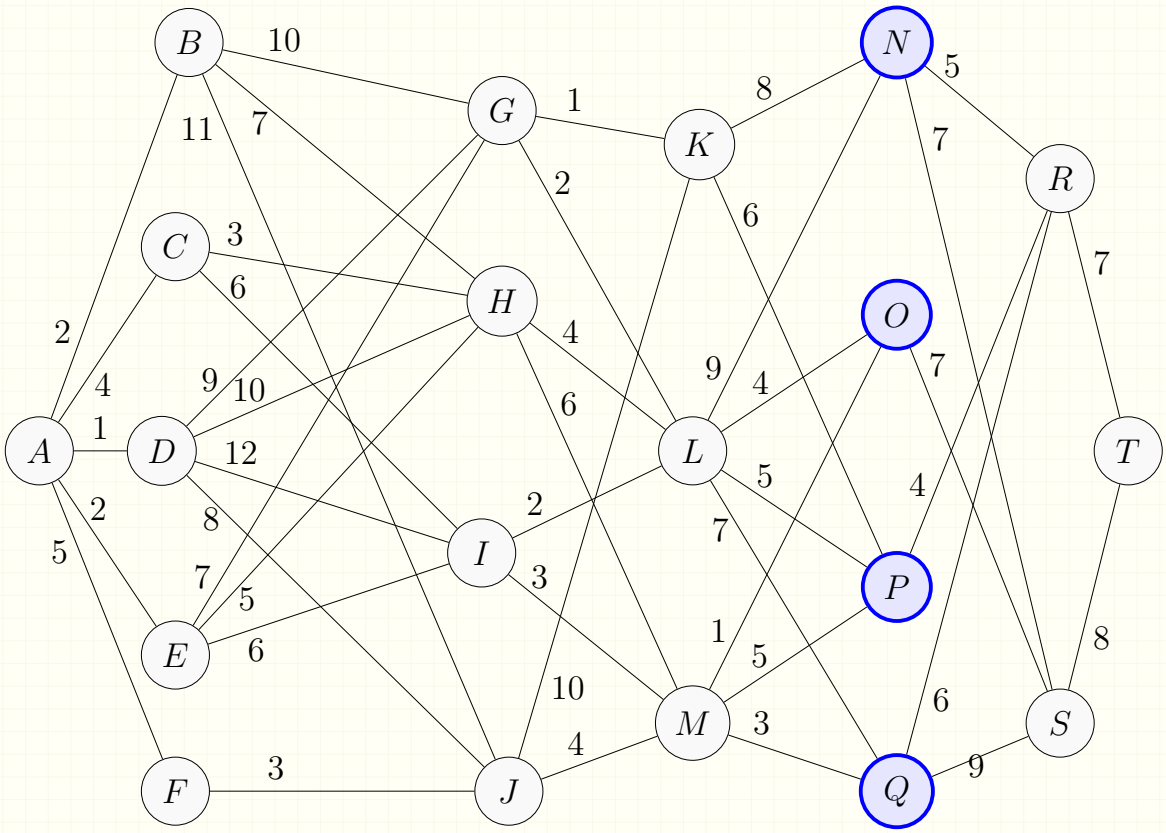
$$c(H, M) = z(H) + d(H, M) = 7 + 6 = 13$$
$$c(I, M) = z(I) + d(I, M) = 8 + 3 = 11$$
$$c(J, M) = z(J) + d(J, M) = 8 + 4 = 12$$

A menor dessas distâncias é 11, que acontece quando chegamos a M passando por I, então

$$z(M) = \min\{\ c(H, M);\ c(I, M);\ c(J, M)\} = 11 \text{ (passando por } I).$$

Quarto estágio

Nesse quarto estágio, vamos calcular $z(N)$, $z(O)$, $z(P)$ e $z(Q)$.



Calculando $z(N)$

Podemos chegar ao nó N pelos nós K ou L, vamos calcular as distâncias de todos os caminhos de A até N passando por esses nós.

$$c(K,N) = z(K) + d(K,N) = 10 + 8 = 18$$
$$c(L,N) = z(L) + d(L,N) = 10 + 9 = 19$$

A menor dessas distâncias é 18, que acontece quando chegamos a N passando por K, então

$$z(N) = \min\{\ c(K,N);\ c(L,N);\ \} = 18 \text{ (passando por } K).$$

Calculando $z(O)$

Podemos chegar ao nó O pelos nós L ou M, vamos calcular as distâncias de todos os caminhos de A até O passando por esses nós.

$$c(L,O) = z(L) + d(L,O) = 10 + 4 = 14$$

$$c(M, O) = z(M) + d(M, O) = 11 + 1 = 12$$

A menor dessas distâncias é 12, que acontece quando chegamos a O passando por M, então

$$z(O) = \min\{\ c(L, O);\ c(M, O);\ \} = 12 \text{ (passando por } M).$$

Calculando $z(P)$

Podemos chegar ao nó P pelos nós K, L ou M, vamos calcular as distâncias de todos os caminhos de A até P passando por esses nós.

$$c(K, P) = z(K) + d(K, P) = 10 + 6 = 16$$
$$c(L, P) = z(L) + d(L, P) = 10 + 5 = 15$$
$$c(M, P) = z(M) + d(M, P) = 11 + 5 = 16$$

A menor dessas distâncias é 15, que acontece quando chegamos a P passando por L, então

$$z(P) = \min\{\ c(K, P);\ c(L, P);\ c(M, P)\} = 15 \text{ (passando por } L).$$

Calculando $z(Q)$

Podemos chegar ao nó Q pelos nós L ou M, vamos calcular as distâncias de todos os caminhos de A até Q passando por esses nós.

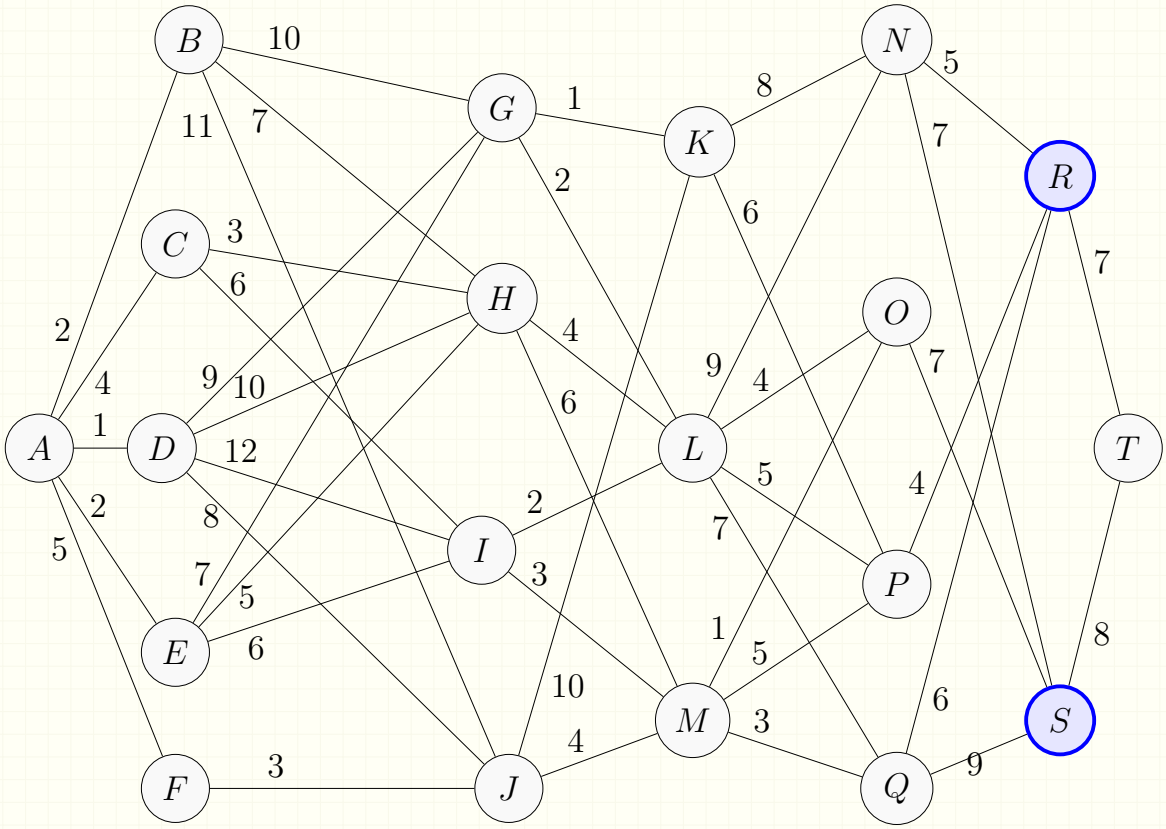
$$c(L, Q) = z(L) + d(L, Q) = 10 + 7 = 17$$
$$c(M, Q) = z(M) + d(M, Q) = 11 + 3 = 14$$

A menor dessas distâncias é 15, que acontece quando chegamos a P passando por L, então

$$z(Q) = \min\{\ c(L, Q);\ c(M, Q);\} = 14 \text{ (passando por } M).$$

Quinto estágio

Nesse quinto estágio, vamos calcular $z(R)$ e $z(S)$.



Calculando $z(R)$

Podemos chegar ao nó R pelos nós N, P ou Q, vamos calcular as distâncias de todos os caminhos de A até R passando por esses nós.

$$c(N,R) = z(N) + d(N,R) = 18 + = 23$$
$$c(P,R) = z(P) + d(P,R) = 15 + 4 = 19$$
$$c(Q,R) = z(Q) + d(Q,R) = 14 + 6 = 20$$

A menor dessas distâncias é 19, que acontece quando chegamos a R passando por P, então

$$z(R) = \min\{\ c(N,R);\ c(P,R);\ c(Q,R)\} = 19 \text{ (passando por } P).$$

Calculando $z(S)$

Podemos chegar ao nó S pelos nós N, O ou Q, vamos calcular as distâncias de todos os caminhos de A até S passando por esses nós.

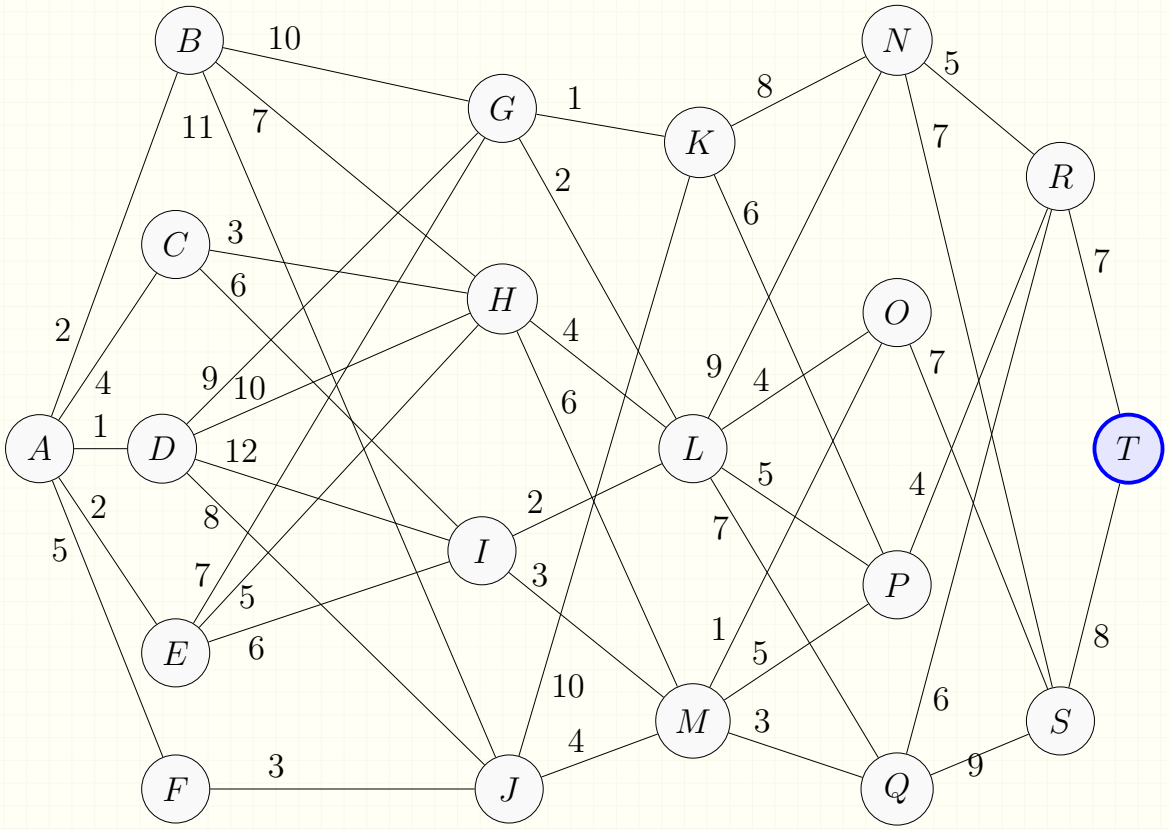
$$c(N,S) = z(N) + d(N,S) = 18 + 7 = 25$$
$$c(O,S) = z(O) + d(O,S) = 12 + 7 = 19$$
$$c(Q,S) = z(Q) + d(Q,S) = 14 + 9 = 23$$

A menor dessas distâncias é 19, que acontece quando chegamos a S passando por O, então

$$z(S) = \min\{\ c(N,S);\ c(O,S);\ c(Q,S)\} = 19 \text{ (passando por } O).$$

Sexto estágio

Nesse sexto estágio, vamos calcular $z(T)$.



Calculando $z(T)$

Podemos chegar ao nó T pelos nós R ou S, vamos calcular as distâncias de todos os caminhos de A até T passando por esses nós.

$$c(R,T) = z(R) + d(R,T) = 19 + 7 = 26$$
$$c(S,T) = z(S) + d(S,T) = 19 + 8 = 27$$

A menor dessas distâncias é 26, que acontece quando chegamos a T passando por R, então

$$z(T) = \min\{\ c(R,T);\ c(S,T)\} = 26 \text{ (passando por } R).$$

Vamos fazer um resumo de cada um dos estágios para uma melhor observação do que aconteceu em cada um e assim determinarmos com maior facilidade a solução ótima.

Resumo da Condição inicial e primeiro estágio

$z(j) = \min\{z(i) + d(i,j)\}$	Passar por
$z(A) = 0$	$\varnothing$
$z(B) = 2$	A
$z(C) = 4$	A
$z(D) = 1$	A
$z(E) = 2$	A
$z(F) = 5$	A

Resumo do Segundo estágio

z	Passar por
$z(G) = 9$	E
$z(H) = 7$	B ou E
$z(I) = 8$	E
$z(J) = 8$	F

Resumo do Terceiro estágio

z	Passar por
$z(K) = 10$	G
$z(L) = 10$	I
$z(M) = 11$	I

Resumo do Quarto estágio

z	Passar por
$z(N) = 18$	K
$z(O) = 12$	M
$z(P) = 15$	L
$z(Q) = 14$	M

Resumo do Quinto estágio

z	Passar por
$z(R) = 19$	P
$z(S) = 19$	O

Resumo do Sexto estágio

z	Passar por
$z(T) = 26$	R

Observando a tabela e aplicando um processo conhecido como Backatrack cujo significa é retroceder temos.

Backatrack: A melhor forma de chegar em T é passando por R, que por sua vez é passando por P, que por sua vez é passando por L, que por sua vez é passando por I, que por sua vez é passando por E, que por sua vez é passando por A. Assim, conclui-se que o caminho ótimo entre A e T é $AEILPRT$.

Até este ponto, utilizamos o problema de caminho mínimo para apresentar os principais conceitos e o funcionamento do algoritmo de programação dinâmica. Nos próximos capítulos, serão apresentados outros problemas clássicos da Pesquisa

Operacional, mostrando como esse método pode ser aplicada na construção de soluções eficientes.

5.3 Uma Breve História da Programação Dinâmica

Por que programação dinâmica é chamada de programação dinâmica?

Essa pergunta foi respondida pelo criador da programação dinâmica, Richard Bellman durante uma entrevista concedida a Stuart Dreyfus. Leia abaixo um trecho dessa entrevista.



Richard Ernest Bellman [9]

"A década de 1950 não foi boa para a pesquisa em matemática. Tivemos um cavalheiro muito interessante em Washington chamado Wilson. Ele foi secretário de Defesa, e realmente tinha um medo patológico e ódio da palavra "pesquisa". Não estou usando o termo levemente; Eu estou usando-o precisamente. Seu rosto ficava vermelho, e ele ficava violento se as pessoas usassem o termo "pesquisa" em sua presença. Você pode imaginar como ele se sentia então, sobre o termo 'matemática'. A RAND Corporation foi contratada pela Força Aérea e a Força Aérea tinha Wilson como seu chefe. Daí, senti que tinha que fazer alguma coisa para esconder do Wilson e da Força Aérea do fato de que eu estava realmente fazendo matemática dentro da RAND Corporation.

Que título, nome eu poderia escolher? Em primeiro lugar eu estava interessado no planejamento, na tomada de decisão, no raciocínio. Mas "planejamento", não é uma boa palavra por várias razões. Decidi, portanto, usar a palavra "programação". Eu queria passar a ideia de que era dinâmica, que era em múltiplos estágios, que variava de acordo com o tempo; eu pensei, vamos matar dois coelhos em uma cajadada só. Vamos usar uma palavra que tem um significado absolutamente preciso: "dinâmica", no sentido clássico da física. Ela também tem uma propriedade muito interessante como um adjetivo, e é impossível usar a palavra "dinâmica" em um sentido pejorativo. Tente pensar de alguma combinação que irá, eventualmente, dar-lhe um sentido pejorativo.

É impossível. Assim, eu pensei que "programação dinâmica" era um bom nome. Era algo que nem mesmo um congressista poderia opor-se. Então eu usei-o como um guarda chuva para as minhas atividades."

Tradução do trecho do seguinte artigo: STUART DREYFUS; RICHARD BELLMAN ON THE BIRTH OF DYNAMIC PROGRAMMING; Operations Research, 2002.

5.4 Exercícios

1) [resp] Um agricultor precisa transportar de caminhão uma carga de uma fazenda até um centro de distribuição. O motorista pode passar por diferentes cidades intermediárias. Cada estrada possui um custo de pedágio e combustível. O objetivo é encontrar o caminho de menor custo total entre a cidade inicial e a cidade final.
A tabela abaixo apresenta os custos das estradas.

Origem	Destino	Custo
A	B	4
A	C	2
B	D	5
B	E	10
C	D	3
C	E	7
D	F	4
E	F	1

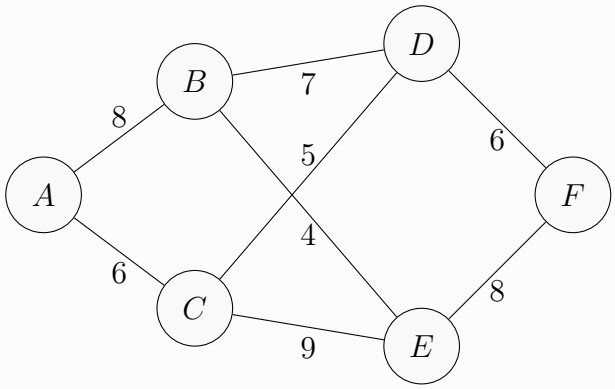
Questões:

a) Represente o problema por meio de um grafo.

b) Resolva utilizando programação dinâmica, calculando o menor custo.

c) Qual caminho deve ser escolhido?

2) [resp] Um produtor rural deseja transportar produtos agrícolas até uma feira. Em cada cidade visitada, ele pode vender parte da carga e obter lucro. Entretanto, ele só pode seguir pelas estradas indicadas no grafo abaixo. Determine o caminho que gera o maior lucro total.



3) [resp] Um estudante precisa sair de casa e chegar à escola passando por alguns pontos da cidade. Cada trajeto possui um tempo médio de deslocamento em minutos. O objetivo é descobrir o caminho mais rápido.

Origem	Destino	Tempo (min)
Casa	Praça	6
Casa	Mercado	4
Praça	Escola	7
Praça	Biblioteca	3
Mercado	Praça	2
Mercado	Biblioteca	6
Biblioteca	Escola	4

Questões:

a) Desenhe o grafo correspondente ao problema.

b) Resolva utilizando programação dinâmica, calculando os menores tempos acumulados.

c) Qual caminho deve ser percorrido?

6

Problema da Mochila

6.1 Introdução 90
6.2 Recuperação da solução ótima 93
6.3 Exemplos 94
6.4 Exercícios 108

6.1 Introdução

O problema da mochila é um dos problemas clássicos da combinatória e da otimização, amplamente estudado tanto em Matemática quanto em Ciências da Computação, devido à sua relevância teórica e às suas múltiplas aplicações práticas. De modo geral, o problema consiste em determinar quais itens devem ser colocados em uma mochila com capacidade limitada, de modo que o valor total transportado seja máximo, respeitando a restrição de peso imposta.

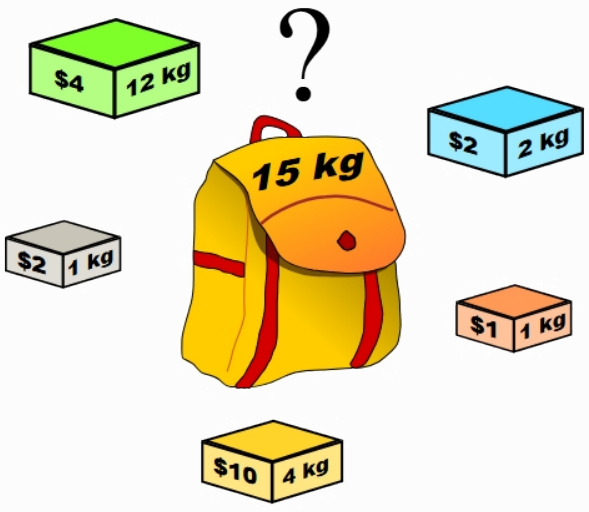


Figura 6.1: Problema da mochila [10]

Mais formalmente, dado um conjunto de n objetos, cada um com peso p_i e valor associado v_i, busca-se um subconjunto

desses objetos cuja soma dos pesos não ultrapasse uma capacidade w, e cuja soma dos valores seja máxima.

A função recursiva progressiva que utilizaremos para o problema da mochila, com capacidade máxima w e n itens, é definida por $z(i, j)$, que representa a utilidade máxima da mochila com capacidade j, considerando os itens de 1 a i, para $i = 1, 2, \ldots, n$ e $0 \leq j \leq w$.

A função (6.1) apresenta a formulação recursiva progressiva utilizada para resolver o problema da mochila por meio da técnica de programação dinâmica.

$$z(i,j) = \begin{cases} 0, & \text{se } i = 0 \text{ ou } j = 0, \\ z(i-1,j), & \text{se } p_i > j, \\ \max\{z(i-1,j),\, v_i + z(i-1,j-p_i)\}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{6.1}$$

A formulação do problema pode ser interpretada à luz dos elementos estruturantes da programação dinâmica. Nesse contexto, o estágio i corresponde à análise do i-ésimo item, no qual se decide pela sua inclusão ou não na mochila. O estado (i, j) representa a situação em que se consideram os itens de 1 até i, com capacidade disponível j, sendo associado a esse estado o valor $z(i, j)$, que indica a utilidade máxima obtida nessas condições.

A decisão em cada estágio consiste em escolher entre não incluir o item i, mantendo o valor $z(i-1, j)$, ou incluí-lo, caso seja viável, obtendo o valor $v_i + z(i-1, j-p_i)$. Essa estrutura evidencia a decomposição do problema em subproblemas menores, característica fundamental da programação dinâmica.

Dessa forma, se

$$z(i-1, j) \geq v_i + z(i-1, j-p_i),$$

não se deve levar o item i. Caso contrário, isto é, se

$$z(i-1, j) \leq v_i + z(i-1, j-p_i),$$

deve-se levar o item i, desde que $p_i \leq j$, ou seja, o peso do item não pode exceder a capacidade disponível na mochila.

Para compreender a relação (6.1) de forma mais intuitiva, vamos interpretar o que ela está dizendo.

A função $z(i, j)$ representa o maior valor que podemos obter utilizando os i primeiros itens e uma mochila com capacidade ainda não utilizada j.

Primeiro, analisamos as situações mais simples. Se não há itens disponíveis ($i = 0$) ou se a mochila tem capacidade zero ($j = 0$), então não é possível colocar nada na mochila. Logo, o valor máximo obtido é igual a zero, o que corresponde às condições iniciais:

$$z(i, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

$$z(0, j) = 0, \quad j \geq 0,$$

Agora, suponha que estamos analisando o item i. Nesse momento, devemos decidir se iremos utilizá-lo ou não. Se o peso do item i for maior que a capacidade disponível ($p_i > j$), então esse item não pode ser colocado na mochila. Nesse caso, a melhor decisão é ignorá-lo, e o valor ótimo permanece o mesmo obtido sem esse item, isto é, $z(i - 1, j)$.

Por outro lado, se o item i cabe na mochila ($p_i \leq j$), então surge uma decisão importante: devemos incluir esse item ou não? Temos, então, duas possibilidades:

- Não incluir o item i, mantendo o valor $z(i - 1, j)$;
- Incluir o item i, o que acrescenta um valor v_i, mas reduz a capacidade disponível em p_i, restando $j - p_i$ para os demais itens.

Note que, como cada item pode ser escolhido apenas uma vez, ao incluí-lo passamos a considerar apenas os itens anteriores, ou seja, utilizamos $z(i - 1, j - p_i)$.

Assim, escolhemos a alternativa que produz o maior valor:

$$z(i, j) = \max\{z(i - 1, j), v_i + z(i - 1, j - p_i)\}.$$

Essa formulação evidencia que, ao incluir o item i, passamos a considerar apenas os itens anteriores, garantindo que cada item seja utilizado no máximo uma vez. Por isso, ao incluir o item i, avançamos para $i - 1$, assegurando que ele não será utilizado novamente.

Tal formulação evidencia a natureza recursiva do problema e sua organização em estágios, características fundamentais da programação dinâmica, nas quais cada decisão ótima depende das soluções ótimas de subproblemas menores.

Em síntese, o problema consiste, a cada etapa, em decidir entre levar ou não levar um item, sempre escolhendo a alternativa que maximiza o valor total sem ultrapassar a capacidade da mochila.

6.2 Recuperação da solução ótima

Após o preenchimento da tabela de programação dinâmica, o valor ótimo do problema é obtido na entrada $z(n, w)$, isto é, na célula correspondente à consideração de todos os n itens e da capacidade máxima w da mochila. No entanto, essa informação, por si só, indica apenas o valor máximo alcançável, não permitindo identificar diretamente quais itens compõem a solução ótima.

Para identificar os itens selecionados, realiza-se um processo de retorno na tabela, partindo da posição $z(n, w)$. Em cada etapa, compara-se o valor da célula atual $z(i, j)$ com o valor da célula imediatamente superior $z(i-1, j)$. Se esses valores forem iguais, conclui-se que o item i não foi incluído na solução ótima, pois sua presença não alterou o valor máximo obtido. Nesse caso, passa-se à análise do estágio anterior, mantendo-se a mesma capacidade j.

Por outro lado, se $z(i, j) \neq z(i-1, j)$, conclui-se que o item i foi incluído na solução ótima. Nesse caso, além de registrar a escolha desse item, deve-se atualizar a capacidade restante da mochila, substituindo j por $j - p_i$, e prosseguir para o estágio anterior, analisando agora a posição $z(i-1, j-p_i)$.

Esse procedimento é repetido sucessivamente até que se chegue ao estágio inicial ou até que a capacidade restante da mochila seja igual a zero. Ao final do processo, obtém-se o conjunto de itens que compõe a solução ótima do problema.

Teorema 6.1: Procedimento de Recuperação da Solução Ótima

Em termos gerais, o procedimento de recuperação da solução ótima pode ser descrito da seguinte forma:

1. Inicia-se na célula $z(n, w)$;
2. Compara-se $z(i, j)$ com $z(i-1, j)$;
3. Se $z(i, j) = z(i-1, j)$, o item i não foi escolhido;
4. Se $z(i, j) \neq z(i-1, j)$, o item i foi escolhido;

5. Quando o item i é escolhido, atualiza-se a capacidade restante para $j - p_i$;
6. Repete-se o processo até $i = 0$ ou $j = 0$.

Esse retorno na tabela permite não apenas determinar o valor ótimo, mas também explicitar a composição da solução, tornando mais clara a interpretação do resultado obtido.

6.3 Exemplos

Exemplo 6.3.1: Uma embarcação pode transportar, no máximo, 4 toneladas. A tabela abaixo apresenta o peso, em toneladas, e o valor, em milhares de reais, das cargas disponíveis.

Objeto	Valor (R$ mil)	Peso (toneladas)
1. Automóveis	31	2
2. Contêiner de eletrônicos	47	3
3. Grãos	14	1

O comandante precisa escolher quais cargas transportar de modo a maximizar o lucro total, sem ultrapassar a capacidade máxima da embarcação.

Para determinar quais cargas devem ser transportadas de modo a maximizar o lucro total, utilizaremos a seguinte função recursiva:

$$z(i,j) = \begin{cases} 0, & \text{se } i = 0 \text{ ou } j = 0, \\ z(i-1,j), & \text{se } p_i > j, \\ \max\{z(i-1,j),\, v_i + z(i-1,j-p_i)\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Inicialmente, organizamos as informações do problema em uma tabela, de modo a facilitar a análise dos dados e a aplicação da relação recursiva.

i	1	2	3
P_i	2	3	1
v_i	31	47	14

A partir desses dados, passamos à aplicação da relação recursiva por estágios.

Condições iniciais

$$z(i,0) = 0$$
$$z(0,j) = 0$$

Primeiro estágio

Nesse primeiro estágio, o índice i assume apenas o valor 1, enquanto o índice j assume os valores 1, 2, 3 e 4, sendo este último correspondente à capacidade máxima da embarcação.

Calcularemos, portanto, os valores de $z(1,1)$, $z(1,2)$, $z(1,3)$ e $z(1,4)$.

$$\begin{aligned} z(1,1) &= z(0,1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Decisão: Como o peso do item 1 excede a capacidade disponível ($p_1 > 1$), não é possível levá-lo.

$$\begin{aligned} z(1,2) &= \max\{z(0,2), 31 + z(0,0)\} \\ &= \max\{0, 31\} \\ &= 31 \end{aligned}$$

Decisão: Levar o item 1

$$\begin{aligned} z(1,3) &= \max\{z(0,3), 31 + z(0,1)\} \\ &= \max\{0, 31\} \\ &= 31 \end{aligned}$$

Decisão: Levar o item 1

$$\begin{aligned} z(1,4) &= \max\{z(0,4), 31 + z(0,2)\} \\ &= \max\{0, 31\} \\ &= 31 \end{aligned}$$

Decisão: Levar o item 1

Segundo estágio

Nesse segundo estágio, o índice i assume o valor 2, enquanto o índice j assume os valores 1, 2, 3 e 4.

Calcularemos, então, os valores de $z(2,1)$, $z(2,2)$, $z(2,3)$ e $z(2,4)$.

$$\begin{aligned} z(2,1) &= z(1,1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Decisão: Como o peso do item 2 excede a capacidade disponível ($p_2 > 1$), não é possível levá-lo.

$$\begin{aligned} z(2,2) &= z(1,2) \\ &= 31 \end{aligned}$$

Decisão: Como o peso do item 2 excede a capacidade disponível ($p_2 > 2$), não é possível levá-lo.

$$\begin{aligned} z(2,3) &= \max\{z(1,3), 47 + z(1,0)\} \\ &= \max\{31, 47\} \\ &= 47 \end{aligned}$$

Decisão: Levar o item 2

$$\begin{aligned} z(2,4) &= \max\{z(1,4), 47 + z(1,1)\} \\ &= \max\{31, 47\} \\ &= 47 \end{aligned}$$

Decisão: Levar o item 2

Terceiro estágio

Nesse terceiro e último estágio, o índice i assume o valor 3. Como o objetivo é determinar o valor ótimo para a capacidade máxima da embarcação, não é necessário calcular os valores $z(3,1)$, $z(3,2)$ e $z(3,3)$, uma vez que tais valores não são necessários para a determinação de $z(3,4)$. Assim, basta calcular diretamente $z(3,4)$.

$$z(3,4) = \max\{z(2,4), 14 + z(2,3)\}$$

$$= \max\{47, 14 + 47\}$$
$$= 61$$

Decisão: Levar o item 3

No exemplo considerado, o valor ótimo foi obtido em $z(3, 4) = 61$. Para identificar os itens selecionados, realiza-se o procedimento de retorno a partir dessa posição. Observa-se que $z(3, 4) \neq z(2, 4)$, o que indica que o item 3 foi incluído na solução ótima. Como o peso desse item é 1, a capacidade restante passa a ser $4 - 1 = 3$. Em seguida, analisa-se a posição $z(2, 3)$. Como $z(2, 3) \neq z(1, 3)$, conclui-se que o item 2 também foi selecionado. Como o peso desse item é 3, a capacidade restante torna-se $3 - 3 = 0$. Nesse ponto, o processo se encerra. Assim, a solução ótima é composta pelos itens 2 e 3, isto é, o contêiner de eletrônicos e a carga de grãos, totalizando 4 toneladas e proporcionando um valor máximo de 61 mil reais.

Exemplo 6.3.2: Um produtor rural precisa escolher quais bombas de poço artesiano irá ligar em sua propriedade durante um período de estiagem. Ele possui 4 bombas disponíveis, mas todas precisam ser alimentadas por um gerador com potência máxima de 8 kVA.

Cada bomba consome uma certa quantidade de energia do gerador e oferece um determinado índice de eficiência hídrica, que representa o benefício de utilizá-la. Como a potência do gerador é limitada, não é possível ligar todas as bombas ao mesmo tempo. Assim, o produtor deseja selecionar o conjunto de bombas que maximize a eficiência total, sem ultrapassar a capacidade de 8 kVA.

A tabela a seguir apresenta os dados das bombas:

Bomba	Potência (kVA)	Eficiência
B1	2	30
B2	3	40
B3	4	50
B4	5	65

Quais bombas o produtor deve escolher para ligar, de modo a obter a maior eficiência total possível, sem ultrapassar a potência máxima de 8 kVA do gerador?

Para determinar quais bombas devem ser ligadas de modo a maximizar a eficiência total, utilizaremos a seguinte função recursiva:

$$z(i,j) = \begin{cases} 0, & \text{se } i = 0 \text{ ou } j = 0, \\ z(i-1,j), & \text{se } p_i > j, \\ \max\{z(i-1,j),\, v_i + z(i-1, j-p_i)\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Inicialmente, organizamos as informações do problema em uma tabela, de modo a facilitar a análise dos dados e a aplicação da relação recursiva.

i	$B1$	$B2$	$B3$	$B4$
p_i	2	3	4	5
v_i	30	40	50	65

A partir desses dados, passamos à aplicação da relação recursiva por estágios.

Condições iniciais:

$$z(i,0) = 0$$
$$z(0,j) = 0$$

Primeiro estágio

Nesse primeiro estágio, o índice i assume apenas o valor 1, enquanto o índice j assume os valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8, sendo este último correspondente à potência máxima do gerador.

Calcularemos, portanto, os valores de $z(1,1)$, $z(1,2)$, $z(1,3)$, $z(1,4)$, $z(1,5)$, $z(1,6)$, $z(1,7)$, e $z(1,8)$

$$\begin{aligned} z(1,1) &= z(0,1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Decisão: Como o peso do item 1 excede a capacidade disponível ($p_1 > 1$), não é possível incluí-lo.

$$z(1,2) = \max\{z(0,2), 30 + z(0,0)\}$$

$$= \max\{0, 30\}$$
$$= 30$$

Decisão: Usar o item 1

$$z(1, j \geq 2) = 30$$

Decisão: Usar o item 1

A partir de $z(1, 2) = 30$, observa-se que será sempre possível utilizar o item 1, pois este possui peso 2 e é o único item disponível nesse estágio. Assim, para $j = 3, 4, 5, 6, 7$ e 8, o valor da função permanece igual a 30, indicando que a bomba 1 será sempre utilizada.

Segundo estágio

Nesse segundo estágio, o índice i assume o valor 2, enquanto o índice j assume os valores de 1 a 8.

$$z(2, 1) = z(1, 1)$$
$$= 0$$

Decisão: Como o peso do item 2 excede a capacidade disponível ($p_2 > 1$), não é possível incluí-lo.

$$z(2, 2) = z(1, 2)$$
$$= 30$$

Decisão: Como o peso do item 2 excede a capacidade disponível ($p_2 > 2$), não é possível incluí-lo.

$$z(2, 3) = \max\{z(1, 3), 40 + z(1, 0)\}$$
$$= \max\{30, 40 + 0\}$$
$$= 40$$

Decisão: Usar o item 2

$$z(2, 4) = \max\{z(1, 4), 40 + z(1, 1)\}$$
$$= \max\{30, 40 + 0\}$$

$$= 40$$

Decisão: Usar o item 2

$$\begin{aligned} z(2, j \geq 5) &= \max\{z(1,5), 40 + z(1,2)\} \\ &= \max\{30, 40 + 30\} \\ &= 70 \end{aligned}$$

Decisão: Usar o item 2

A partir de $z(2,5) = 70$, observa-se que é possível utilizar simultaneamente os itens 1 e 2, pois a soma de seus pesos é igual a 5. Para valores maiores de j, essa combinação continua viável, mantendo o valor 70, o que indica que ambas as bombas são utilizadas.

Terceiro estágio

Nesse terceiro estágio, o índice i assume o valor 3, enquanto o índice j assume os valores de 1 a 8

$$\begin{aligned} z(3,1) &= z(2,1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Decisão: Como o peso do item 3 excede a capacidade disponível ($p_3 > 1$), não é possível incluí-lo.

$$\begin{aligned} z(3,2) &= z(2,2) \\ &= 30 \end{aligned}$$

Decisão: Como o peso do item 3 excede a capacidade disponível ($p_3 > 2$), não é possível incluí-lo.

$$\begin{aligned} z(3,3) &= z(2,3) \\ &= 40 \end{aligned}$$

Decisão: Como o peso do item 3 excede a capacidade disponível ($p_3 > 3$), não é possível incluí-lo.

$$z(3,4) = \max\{z(2,4), 50 + z(2,0)\}$$

$$= \max\{40, 50 + 0\}$$
$$= 50$$

Decisão: Usar o item 3

$$z(3,5) = \max\{z(2,5), 50 + z(2,1)\}$$
$$= \max\{70, 50 + 0\}$$
$$= 70$$

Decisão: Não usar o item 3

$$z(3,6) = \max\{z(2,6), 50 + z(2,2)\}$$
$$= \max\{70, 50 + 30\}$$
$$= 80$$

Decisão: Usar o item 3

$$z(3,7) = \max\{z(2,7), 50 + z(2,3)\}$$
$$= \max\{70, 50 + 40\}$$
$$= 90$$

Decisão: Usar o item 3

$$z(3,8) = \max\{z(2,8), 50 + z(2,4)\}$$
$$= \max\{70, 50 + 40\}$$
$$= 90$$

Decisão: Usar o item 3

Quarto estágio

Nesse quarto e último estágio, o índice i assume o valor 4. Como o objetivo é determinar o valor ótimo correspondente à capacidade máxima do gerador, não é necessário calcular os valores $z(4,1), \ldots, z(4,7)$, uma vez que tais valores não influenciam o cálculo de $z(4,8)$. Assim, basta determinar diretamente esse valor.

$$z(4,8) = \max\{z(3,8), 65 + z(3,3)\}$$
$$= \max\{90, 65 + 40\}$$

$= 105$

Decisão: Usar o item 4

Recuperando a solução ótima

Para identificar os itens selecionados, realiza-se os passos de retorno descrito no procedimento (6.1).

Começamos em $z(4, 8) = 105$.

No exemplo considerado, o valor ótimo foi obtido em $z(4, 8) = 105$. Observa-se que $z(4, 8) \neq z(3, 8)$, o que indica que o item 4 foi incluído na solução ótima. Como o peso desse item é 5, a capacidade restante passa a ser $8 - 5 = 3$.

Em seguida, analisa-se a posição $z(3, 3)$. Como $z(3, 3) = z(2, 3)$, conclui-se que o item 3 não foi selecionado, mantendo-se a capacidade restante igual a 3.

Observa-se então que $z(2, 3) \neq z(1, 3)$, o que indica que o item 2 foi incluído na solução ótima. Como seu peso é 3, a capacidade restante passa a ser $3 - 3 = 0$.

Como a capacidade restante é nula, o processo se encerra. Assim, a solução ótima é composta pelos itens 2 e 4, isto é, as bombas selecionadas são $B2$ e $B4$, com consumo total de $3 + 5 = 8$ kVA e eficiência total igual a $40 + 65 = 105$.

Exemplo 6.3.3: Um pequeno produtor rural precisa transportar uma carga de produtos agrícolas para comercialização em uma feira regional. Para isso, ele dispõe de um caminhão com capacidade máxima de 6 toneladas. No galpão da fazenda, estão disponíveis diferentes tipos de sacos para carregamento: soja, milho, capim, sorgo e café.

Cada tipo de saco ocupa uma determinada quantidade da capacidade do caminhão e gera um certo lucro para o produtor. Como a capacidade do caminhão é limitada, ele precisa decidir quais sacos transportar de modo a maximizar o lucro total, sem ultrapassar o limite de 6 toneladas.

A tabela a seguir apresenta os dados disponíveis:

Produto	Peso por lote (toneladas)	Lucro (valor monetário)
1. Soja	2	30
2. Milho	1	18
3. Capim	3	35
4. Sorgo	2	28
5. Café	4	50

Quais produtos o produtor deve carregar no caminhão para obter o maior lucro possível, sem ultrapassar a capacidade máxima de 6 toneladas?

Para determinar quais produtos devem ser carregados no caminhão de modo a maximizar o lucro total, utilizaremos a seguinte função recursiva:

$$z(i,j) = \begin{cases} 0, & \text{se } i = 0 \text{ ou } j = 0, \\ z(i-1,j), & \text{se } p_i > j, \\ \max\{z(i-1,j),\, v_i + z(i-1, j-p_i)\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Inicialmente, organizamos as informações do problema em uma tabela, de modo a facilitar a análise dos dados e a aplicação da relação recursiva.

i	1	2	3	4	5
P_i	2	1	3	2	4
v_i	30	18	35	28	50

A partir desses dados, passamos à aplicação da relação recursiva por estágios.

Condições iniciais

$$z(i,0) = 0,$$
$$z(0,j) = 0.$$

Primeiro estágio

Nesse primeiro estágio, o índice i assume apenas o valor 1, enquanto o índice j assume os valores 1, 2, 3, 4, 5 e 6, sendo este último correspondente à capacidade máxima do caminhão.

Calculamos, portanto, os valores de $z(1,1)$, $z(1,2)$, $\ldots$, $z(1,6)$:

$$\begin{aligned} z(1,1) &= z(0,1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Decisão: Como o peso do item 1 excede a capacidade disponível ($p_1 > 1$), não é possível incluí-lo.

$$\begin{aligned} z(1, j \geq 2) &= \max\{z(0,2), 30 + z(0,0)\} \\ &= \max\{0, 30\} \\ &= 30 \end{aligned}$$

Decisão: Usar o item 1

A partir de $z(1,2) = 30$, observa-se que será sempre possível utilizar o item 1, pois este possui peso 2 e é o único item disponível nesse estágio. Assim, para $j = 3, 4, 5$ e 6, o valor da função permanece igual a 30, indicando que o item 1 será sempre utilizado.

Segundo estágio

Nesse segundo estágio, o índice i assume o valor 2, enquanto o índice j assume os valores de 1 a 6.

$$\begin{aligned} z(2,1) &= \max\{z(1,1), 18 + z(1,0)\} \\ &= \max\{0, 18\} \\ &= 18 \end{aligned}$$

Decisão: Usar o item 2

$$\begin{aligned} z(2,2) &= \max\{z(1,2), 18 + z(1,1)\} \\ &= \max\{30, 18\} \\ &= 30 \end{aligned}$$

Decisão: Não usar o item 2

$$\begin{aligned} z(2, j \geq 3) &= \max\{z(1,3), 18 + z(1,2)\} \\ &= \max\{30, 48\} \\ &= 48 \end{aligned}$$

Decisão: Usar o item 2

A partir de $z(2,3) = 48$, observa-se que é possível utilizar simultaneamente os itens 1 e 2, pois a soma de seus pesos é igual a 3. Para valores maiores de j, essa combinação continua viável, mantendo o valor 48.

Terceiro estágio

$$\begin{aligned} z(3,1) &= z(2,1) \\ &= 18 \end{aligned}$$

Decisão: Como o peso do item 3 excede a capacidade disponível ($p_3 > 1$), não é possível incluí-lo.

$$\begin{aligned} z(3,2) &= z(2,2) \\ &= 30 \end{aligned}$$

Decisão: Não usar o item 3

$$\begin{aligned} z(3,3) &= \max\{z(2,3), 35 + z(2,0)\} \\ &= \max\{48, 35\} \\ &= 48 \end{aligned}$$

Decisão: Não usar o item 3

$$\begin{aligned} z(3,4) &= \max\{z(2,4), 35 + z(2,1)\} \\ &= \max\{48, 53\} \\ &= 53 \end{aligned}$$

Decisão: Usar o item 3

$$\begin{aligned} z(3,5) &= \max\{z(2,5), 35 + z(2,2)\} \\ &= \max\{48, 65\} \\ &= 65 \end{aligned}$$

Decisão: Usar o item 3

$$\begin{aligned} z(3,6) &= \max\{z(2,6), 35 + z(2,3)\} \\ &= \max\{48, 83\} \end{aligned}$$

$$= 83$$

Decisão: Usar o item 3

Quarto estágio

$$\begin{aligned} z(4,1) &= z(3,1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Decisão: Como o peso do item 4 excede a capacidade disponível ($p_4 > 1$), não é possível incluí-lo.

$$\begin{aligned} z(4,2) &= \max\{z(3,2); 28 + z(3,0)\} \\ &= \max\{30; 28 + 0\} \\ &= 30 \end{aligned}$$

Decisão: Não usar o item 4

$$\begin{aligned} z(4,3) &= \max\{z(3,3); 28 + z(3,1)\} \\ &= \max\{48; 28 + 0\} \\ &= 48 \end{aligned}$$

Decisão: Não usar o item 4

$$\begin{aligned} z(4,4) &= \max\{z(3,4); 28 + z(3,2)\} \\ &= \max\{53; 28 + 30\} \\ &= 58 \end{aligned}$$

Decisão: Usar o item 4

$$\begin{aligned} z(4,5) &= \max\{z(3,5); 28 + z(3,3)\} \\ &= \max\{65; 28 + 48\} \\ &= 76 \end{aligned}$$

Decisão: Usar o item 4

$$\begin{aligned} z(4,6) &= \max\{z(3,6); 28 + z(3,4)\} \\ &= \max\{83; 28 + 53\} \\ &= 83 \end{aligned}$$

Decisão: Não usar o item 4

Quinto estágio

$$\begin{aligned} z(5,6) &= \max\{z(4,6), 50 + z(4,2)\} \\ &= \max\{83, 80\} \\ &= 83 \end{aligned}$$

Decisão: Não usar o item 5

Recuperando a solução ótima

O valor ótimo encontrado é $z(5,6) = 83$. Como $z(5,6) = z(4,6)$, conclui-se que o item 5 (café) não foi transportado.

Da mesma forma, como $z(4,6) = z(3,6)$, o item 4 (sorgo) também não foi selecionado.

Observa-se que $z(3,6) \neq z(2,6)$, indicando que o item 3 (capim) foi incluído. Assim, a capacidade restante passa a ser $6 - 3 = 3$.

Em seguida, como $z(2,3) \neq z(1,3)$, conclui-se que o item 2 (milho) foi selecionado. A capacidade restante passa a ser $3 - 1 = 2$.

Por fim, como resta capacidade 2 e o item 1 (soja) possui peso 2, ele também é incluído.

Assim, a solução ótima é composta pelos produtos soja, milho e capim, com peso total $2 + 1 + 3 = 6$ toneladas e lucro total igual a 83 unidades monetárias.

O Problema da Mochila possui aplicações diretas em contextos reais, como alocação de recursos, seleção de investimentos, compreensão de dados e planejamento de carga, tornando-se um exemplo didático importante no ensino de algoritmos e na compreensão de técnicas de modelagem matemática aplicadas à tomada de decisão.

6.4 Exercícios

1) [resp] Um navio cargueiro com capacidade máxima de 9 toneladas, precisa transportar mercadorias entre dois portos. No porto, estão disponíveis quatro cargas distintas, e cada uma pode ser embarcada no máximo uma vez. A tabela a seguir apresenta o peso e o valor associado a cada carga:

Carga	**Peso (toneladas)**	**Valor (mil R$)**
1	2	12
2	3	18
3	4	20
4	5	24

O comandante deseja escolher quais cargas devem ser transportadas de modo a maximizar o valor total, sem ultrapassar a capacidade máxima do navio. Quais cargas devem ser embarcadas para obter o maior valor possível?

2) [resp] Considere o problema de selecionar objetos para serem colocados em uma mochila com capacidade máxima de 50 unidades de peso. Dispomos de três objetos, cada um com um determinado valor e peso, conforme apresentado na tabela a seguir. O objetivo é escolher quais objetos devem ser colocados na mochila de modo que o valor total seja máximo, sem que o peso total ultrapasse a capacidade da mochila.

Objeto	Valor	Peso
1	60	10
2	100	20
3	120	30

Determine quais objetos devem ser selecionados para maximizar o valor total transportado, respeitando a capacidade máxima da mochila.

3) [resp] Um drone será utilizado para transportar equipamentos para uma região de difícil acesso. Devido às limitações de carga do equipamento, o peso total transportado não pode exceder 6 kg. Estão disponíveis cinco objetos, e cada um pode ser levado apenas uma vez. A tabela abaixo apresenta os dados dos objetos:

Objeto	**Peso** (kg)	**Utilidade**
1	1	6
2	2	10
3	3	12
4	4	18
5	5	22

O objetivo é maximizar a utilidade total dos objetos transportados. Responda:

a) Escreva a relação de recorrência da programação dinâmica para o problema.

b) Determine o valor máximo de utilidade possível.

c) Indique quais objetos devem ser selecionados.

7

Problema da Mochila com Repetição

7.1 Introdução 109
7.2 Recuperação da solução ótima 112
7.3 Exemplos 113
7.4 Exercícios 127

7.1 Introdução

O problema da mochila com repetição consiste em determinar a quantidade de unidades de cada item que devem ser incluídas em uma mochila, de modo a maximizar o valor total obtido, respeitando-se a capacidade máxima disponível.

Considera-se um conjunto de n tipos de itens, em que cada item i possui peso p_i e valor associado v_i. O objetivo é selecionar quantidades inteiras desses itens de forma que a soma dos pesos não ultrapasse a capacidade w da mochila, ao mesmo tempo em que a soma dos valores seja maximizada. Denotamos por x_i a quantidade de unidades escolhidas do item do tipo i, sendo $x_i \in \mathbb{N}$.

Para resolver esse problema por meio da programação dinâmica, define-se a função $z(i, j)$ como o valor máximo da mochila que pode ser obtido utilizando os itens de 1 até i, considerando uma capacidade disponível igual a j, com $i = 1, 2, \ldots, n$ e $0 \leq j \leq w$.

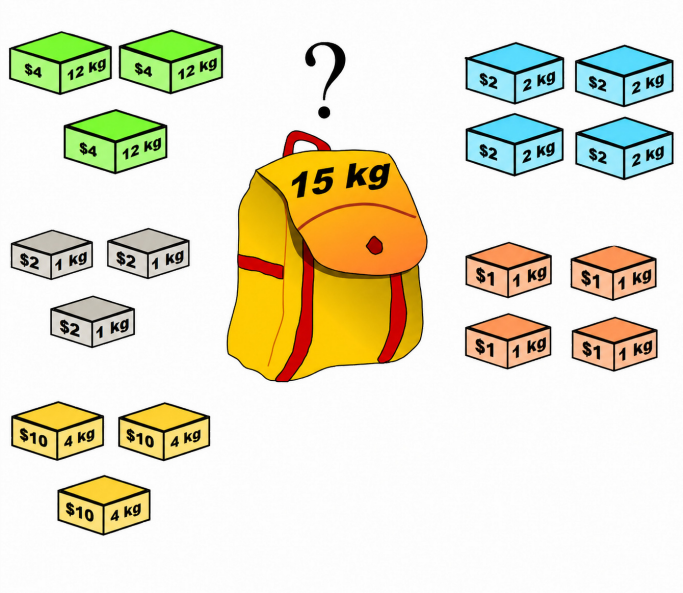


Figura 7.1: Problema da mochila com repetição (Adaptado de [10])

Sob a perspectiva da programação dinâmica, o problema pode ser interpretado em termos de seus elementos estruturais. O estágio i corresponde à análise do i-ésimo tipo de item, enquanto o estado (i, j) representa a situação em que se consideram os itens até o índice i, dispondo de uma capacidade restante j. A cada estado associa-se o valor $z(i, j)$, que indica o melhor resultado possível nessas condições.

A decisão em cada estágio consiste em escolher entre não incluir o item i, preservando o valor $z(i-1, j)$, ou incluir uma certa quantidade x_i desse item, desde que haja capacidade suficiente, obtendo-se um valor acrescido correspondente. Essa estrutura evidencia a decomposição do problema em subproblemas menores, característica central da programação dinâmica.

A Função 7.1 apresenta a formulação recursiva utilizada para resolver o problema da mochila com repetição por meio da técnica de programação dinâmica.

$$z(i,j) = \begin{cases} 0, & \text{se } i = 0 \text{ ou } j = 0, \\ w(i,j), & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{7.1}$$

$$w(i,j) = \max_{p_i x_i \leq j} \{x_i v_i + z(i-1, j - x_i p_i)\}, \qquad x_i = 0, 1, 2, \ldots$$

O x_i, na função $w(i, j)$, determina a quantidade de unidades do item i que devem ser levados.

Se ao calcularmos $w(i, j)$ e o único valor de x_i que satisfaz a condição $p_i x_i \leq j$ for $x_i = 0$, estamos no caso onde não temos espaço para incluir nenhum item do tipo i.

Neste caso temos que

$$w(i,j) = z(i-1,j),$$

isto é, o valor de w é o mesmo da etapa anterior.

Assim, ao comparar as alternativas,

$$z(i-1,j) \quad \text{e} \quad x_i v_i + z(i-1, j-x_i p_i),$$

deve-se optar pela que proporciona maior valor, desde que a restrição de capacidade seja satisfeita.

Para compreender essa relação de forma mais intuitiva, vamos interpretar o que ela está dizendo.

A função $z(i,j)$ representa o maior valor que podemos obter utilizando os i primeiros itens e uma mochila com capacidade disponível igual a j.

Primeiro, observe as situações mais simples. Se não há itens disponíveis ($i = 0$) ou se a mochila tem capacidade zero ($j = 0$), então não é possível colocar nada na mochila. Portanto, o valor máximo obtido é igual a zero. Assim, as condições iniciais são:

$$z(i,0) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

$$z(0,j) = 0, \quad j \geq 0,$$

Agora, suponha que estamos analisando o item i. Nesse caso, existem duas situações possíveis.

Se o peso do item i for maior que a capacidade disponível ($p_i > j$), então esse item não pode ser colocado na mochila. Nesse caso, a melhor decisão é simplesmente ignorá-lo, e o valor ótimo permanece o mesmo obtido sem esse item, isto é, $z(i-1,j)$.

Por outro lado, se o item i cabe na mochila ($p_i \leq j$), a solução é determinada pela função $w(i,j)$, que avalia a melhor alternativa entre incluir ou não esse item.

Temos, então, duas opções:

- Não incluir o item i, mantendo o valor $z(i-1,j)$;

- Incluir o item i, o que acrescenta um valor $x_i \cdot v_i$, mas reduz a capacidade disponível em $x_i \cdot p_i$, restando $j - x_i \cdot p_i$ para os demais itens.

Assim, escolhemos a alternativa que produz o maior valor:

$$z(i, j) = \max\{z(i-1, j), x_i \cdot v_i + z(i-1, j - x_i \cdot p_i)\}.$$

Em resumo, a cada etapa comparamos diferentes quantidades possíveis do item, escolhendo aquela que maximiza o valor total sem ultrapassar a capacidade da mochila.

Essa expressão evidencia a natureza recursiva do problema e sua organização em estágios, nas quais a decisão ótima em cada etapa depende diretamente das soluções ótimas obtidas para subproblemas de menor dimensão.

7.2 Recuperação da solução ótima

A recuperação da solução ótima é realizada a partir da análise dos valores obtidos na tabela da programação dinâmica, iniciando-se do estado final (i, j).

Se $z(i, j) = z(i-1, j)$, então o item i não foi incluído na solução ótima. Nesse caso, passa-se ao estado $(i-1, j)$.

Caso contrário, isto é, se $z(i, j) \neq z(i-1, j)$, conclui-se que o item i foi incluído. Nesse caso, determina-se a quantidade x_i que maximiza a expressão

$$x_i v_i + z(i-1, j - x_i p_i).$$

Após identificar esse valor, a capacidade restante passa a ser $j - x_i p_i$, o processo continua a partir do estado $(i-1, j)$.

Esse procedimento é repetido até que se atinja $i = 0$ ou $j = 0$.

7.3 Exemplos

Exemplo 7.3.1: Um estudante deseja organizar materiais escolares em uma mochila para levar à escola. A mochila possui capacidade máxima de 5 kg.

Em sua mesa, há três tipos de materiais armazenados em caixas, e cada caixa contém itens idênticos. O estudante pode levar quantas caixas quiser de cada tipo, desde que respeite o limite de peso da mochila.

Cada tipo de caixa possui um peso e um valor associado, conforme a tabela a seguir:

	Item	Peso (kg)	Valor (R$)
1.	Canetas	2	12
2.	Lápis	1	10
3.	Borrachas	2	15

Sabendo que há disponibilidade ilimitada de cada tipo de caixa, determine quantas caixas de cada item devem ser escolhidas para maximizar o valor total transportado, sem ultrapassar a capacidade de 5 kg da mochila.

Vamos determinar a quantidade de caixas de cada item que deve ser transportada na mochila, de modo a maximizar o valor total, utilizando a função recursiva (7.1):

Vamos organizar as informações do problema em uma tabela, para facilitar a análise dos dados e a aplicação da relação recursiva.

i	1	2	3
p_i	2	1	2
v_i	12	10	15

Passamos agora à aplicação da relação recursiva por estágios.

Condições iniciais:

Estamos tratando o caso $i = 0$ ou o caso $j = 0$, portanto, segundo a função (7.1)

$$z(i, 0) = 0,$$
$$z(0, j) = 0.$$

Em todos os estágios seguintes teremos i e j diferentes de zero.

Primeiro estágio

Nesse primeiro estágio, o índice i assume apenas o valor 1, enquanto o índice j assume os valores $1, 2, 3, 4$ e 5, sendo este último correspondente à capacidade máxima da mochila.

Calculamos, portanto, os valores de $z(1, 1)$, $z(1, 2)$, $z(1, 3)$, $z(1, 4)$ e $z(1, 5)$:

$$z(1, 1) = z(0, 1) = 0$$

Decisão: Como o peso do item 1 excede a capacidade disponível ($p_1 > 1$), não é possível selecioná-lo.

$$\begin{aligned} z(1, 2) = w(1, 2) &= \max\{z(0, 2), 12 + z(0, 0)\} \\ &= \max\{0, 12\} \\ &= 12 \end{aligned}$$

Decisão: Levar 1 unidade do item 1

$$\begin{aligned} z(1, 3) = w(1, 3) &= \max\{z(0, 3), 12 + z(0, 1)\} \\ &= \max\{0, 12\} \\ &= 12 \end{aligned}$$

Decisão: Levar 1 unidade do item 1

$$\begin{aligned} z(1, 4) = w(1, 4) &= \max\{z(0,4), 12 + z(0,2), 2 \cdot 12 + z(0,0)\} \\ &= \max\{0, 12, 24\} \\ &= 24 \end{aligned}$$

Decisão: Levar 2 unidades do item 1

$$\begin{aligned} z(1, 5) = w(1, 5) &= \max\{z(0, 5), 12 + z(0, 3), 2 \cdot 12 + z(0, 1)\} \\ &= \max\{0, 12, 24\} \end{aligned}$$

$$= 24$$

Decisão: Levar 2 unidades do item 1

Segundo estágio

Nesse segundo estágio, o índice i assume o valor 2, enquanto o índice j assume os valores de 1 a 5.

$$\begin{aligned} z(2,1) = w(2,1) &= \max\{z(1,1), 10 + z(1,0)\} \\ &= \max\{0, 10\} \\ &= 10 \end{aligned}$$

Decisão: Levar 1 unidade do item 2

$$\begin{aligned} z(2,2) = w(2,2) &= \max\{z(1,2), 10 + z(1,1), 2 \cdot 10 + z(1,0)\} \\ &= \max\{12, 10, 20\} \\ &= 20 \end{aligned}$$

Decisão: Levar 2 unidades do item 2

$$\begin{aligned} z(2,3) = w(2,3) &= \max\{z(1,3), 10 + z(1,2), 2 \cdot 10 + z(1,1), 3 \cdot 10 + z(1,0)\} \\ &= \max\{12, 22, 20, 30\} \\ &= 30 \end{aligned}$$

Decisão: Levar 3 unidades do item 2

$$\begin{aligned} z(2,4) = w(2,4) &= \max\{z(1,4), 10 + z(1,3), 2 \cdot 10 + z(1,2), \\ &\quad 3 \cdot 10 + z(1,1), 4 \cdot 10 + z(1,0)\} \\ &= \max\{24, 22, 32, 30, 40\} \\ &= 40 \end{aligned}$$

Decisão: Levar 4 unidades do item 2

$$\begin{aligned} z(2,5) = w(2,5) &= \max\{z(1,5), 10 + z(1,4), 2 \cdot 10 + z(1,3), 3 \cdot 10 + z(1,2), \\ &\quad 4 \cdot 10 + z(1,1), 5 \cdot 10 + z(1,0)\} \\ &= \max\{24, 34, 32, 42, 40, 50\} \\ &= 50 \end{aligned}$$

Decisão: Levar 5 unidades do item 2

Terceiro estágio

Nesse terceiro e último estágio, o índice i assume o valor 3. Como o objetivo é determinar o valor ótimo correspondente à capacidade máxima da mochila, não é necessário calcular os valores $z(3,1),\ldots,z(3,4)$, uma vez que tais valores não influenciam o cálculo de $z(3,5)$. Assim, basta determinar diretamente esse valor:

$$\begin{aligned} z(3,5) = w(3,5) &= \max\{z(2,5), 15 + z(2,3), 2\cdot 15 + z(2,1)\} \\ &= \max\{50, 15+30, 30+10\} \\ &= \max\{50, 45, 40\} \\ &= 50 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 3

Recuperando a solução ótima

O valor ótimo encontrado é $z(3,5) = 50$. Como $z(3,5) = z(2,5)$, conclui-se que o item 3 não foi incluído na mochila.

Observa-se, ainda, que

$$z(2,5) = 5\cdot 10 + z(1,0) = 50,$$

o que mostra que a melhor escolha no segundo estágio foi tomar $x_2 = 5$, isto é, cinco unidades do item 2. Como isso consome toda a capacidade disponível, a capacidade restante passa a ser

$$5 - 5\cdot 1 = 0.$$

Assim, a solução ótima é composta por cinco caixas de lápis, com peso total de $5\cdot 1 = 5$ kg e valor total igual a $5\cdot 10 = 50$ reais.

Você concorda com a solução encontrada no exemplo 7.3? Embora o resultado esteja matematicamente correto, será que essa seria a melhor escolha para um estudante?

A solução obtida pelo algoritmo consiste em transportar cinco caixas de lápis,

totalizando 5 kg e R$ 50,00. Entretanto, na prática, um estudante também necessita de outros materiais escolares, como canetas, borrachas e cadernos. Isso mostra que, embora o algoritmo tenha encontrado a solução ótima para o problema formulado, ela não é necessariamente a mais adequada à realidade.

É importante compreender que um algoritmo fornece a melhor solução dentro das premissas e restrições estabelecidas no modelo matemático. Portanto, a construção de um modelo exige uma análise cuidadosa da situação, pois a ausência de aspectos relevantes pode levar a resultados matematicamente corretos, mas pouco adequados às necessidades reais. Nesse exemplo, o modelo considera os pesos e os valores dos materiais com o objetivo de maximizar o valor transportado, sem levar em conta a necessidade de cada item para as atividades escolares do estudante.

Exemplo 7.3.2: Um agricultor precisa transportar defensivos agrícolas de um galpão da fazenda até a lavoura utilizando um trator com reboque, cuja capacidade máxima de carga é de 4 toneladas. No depósito, existem três tipos de defensivos agrícolas, cada um com um peso por carga e um valor econômico associado, representando o lucro obtido com sua aplicação na lavoura.

Defensivo	**Peso por carga (toneladas)**	**Valor econômico (R$ mil)**
1	3	8
2	1	14
3	2	20

Como o depósito possui grande quantidade de cada produto, é permitido transportar várias cargas do mesmo tipo de defensivo. O agricultor deseja determinar quantas cargas de cada tipo devem ser transportadas para maximizar o valor econômico total, respeitando a capacidade máxima de 4 toneladas do trator.

Qual é a combinação de defensivos agrícolas que maximiza o valor transportado?

Para determinar quais produtos devem ser carregados no trator de modo a maximizar o valor transportado, utilizaremos a função recursiva 7.1.

Inicialmente, organizamos as informações do problema em uma tabela, de modo a facilitar a análise dos dados e a aplicação da relação recursiva.

i	1	2	3
P_i	3	1	2
v_i	8	14	20

Passamos agora à aplicação da relação recursiva por estágios.

Condições iniciais

$$z(i,0) = 0,$$
$$z(0,j) = 0.$$

Primeiro estágio

Nesse primeiro estágio, o índice i assume apenas o valor 1, enquanto o índice j assume os valores 1, 2, 3, e 4, sendo este último correspondente à capacidade máxima do trator.

Calculamos, portanto, os valores de $z(1,1)$, $z(1,2)$, $z(1,3)$ e $z(1,4)$:

$$\begin{aligned} z(1,1) &= z(0,1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Decisão: Como o peso do item 1 excede a capacidade disponível ($p_1 > 1$), não é possível levá-lo.

$$\begin{aligned} z(1,2) &= z(0,2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Decisão: Como o peso do item 1 excede a capacidade disponível ($p_1 > 2$), não é possível levá-lo.

$$\begin{aligned} z(1,3) = w(1,3) &= \max\{z(0,3); 8 + z(0,0)\} \\ &= \max\{0; 8+0\} \\ &= 8 \end{aligned}$$

Decisão: Levar 1 unidade do item 1

$$z(1,4) = w(1,4) = \max\{z(0,4); 8 + z(0,1)$$

$$= \max\{0; 8 + 0\}$$
$$= 8$$

Decisão: Levar 1 unidade do item 1

Segundo estágio

O índice i assume agora apenas o valor 2, enquanto o índice j assume os valores de 1 a 4:

$$z(2,1) = w(2,1) = \max\{z(1,1); 1 \cdot 14 + z(1,0)\}$$
$$= \max\{0; 14\}$$
$$= 14$$

Decisão: Levar 1 unidade do item 2

$$z(2,2) = w(2,2) = \max\{z(1,2); 1 \cdot 14 + z(1,1); 2 \cdot 14 + z(1,0)$$
$$= \max\{0; 14; 28\}$$
$$= 28$$

Decisão: Levar 2 unidades do item 2

$$z(2,3) = w(2,3) = \max\{z(1,3); 1 \cdot 14 + z(1,2); 2 \cdot 14 + z(1,1);$$
$$3 \cdot 14 + z(1,0)\}$$
$$= \max\{8; 14; 28; 42\}$$
$$= 42$$

Decisão: Levar 3 unidades do item 2

$$z(2,4) = w(2,4) = \max\{z(1,4); 1 \cdot 14 + z(1,3); 2 \cdot 14 + z(1,2);$$
$$3 \cdot 14 + z(1,1); 4 \cdot 14 + z(1,0)\}$$
$$= \max\{8; 22; 28; 42; 56\}$$
$$= 56$$

Decisão: Levar 4 unidades do item 4

Terceiro estágio

Nesse último estágio, o índice i assume o valor 3. Não é necessário calcular os valores $z(3,1)$, $z(3,2)$ e $z(3,3)$, pois eles não influenciam o cálculo de $z(3,4)$. Assim, determinamos diretamente:

$$\begin{aligned} z(3,4) = w(3,4) &= \max\{z(2,4); 1 \cdot 20 + z(2,2); 2 \cdot 20 + z(2,0)\} \\ &= \max\{56; 48; 40\} \\ &= 56 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 3

Recuperando a solução ótima

O valor ótimo encontrado é $z(3,4) = 56$. Como $z(3,4) = z(2,4)$, conclui-se que o item 3 não foi transportado no trator.

Observa-se, ainda, que

$$z(2,4) = 4 \cdot 14 + z(1,0) = 56,$$

o que mostra que a melhor escolha no segundo estágio foi tomar $x_2 = 4$, isto é, quatro unidades do item 2. Como essa escolha consome toda a capacidade disponível, a capacidade restante passa a ser

$$4 - 4 \cdot 1 = 0.$$

Assim, a solução ótima é composta por quatro cargas do defensivo 2. O peso total transportado é $4 \cdot 1 = 4$ toneladas, e o valor total obtido é igual a $4 \cdot 14 = 56$ mil reais.

Exemplo 7.3.3: Um produtor rural precisa transportar uma carga de produtos agrícolas para comercialização em uma Cooperativa regional. Para isso, ele dispõe de um caminhão com capacidade máxima de 6 toneladas.

No galpão da fazenda, há sacos de diferentes produtos que podem ser carregados no caminhão: soja, milho, capim, sorgo e café. Cada tipo de saco possui um determinado peso e proporciona um certo lucro ao produtor quando comercializado.

Diferentemente de uma situação em que cada tipo de saco só poderia ser

escolhido uma única vez, neste caso o produtor possui quantidade suficiente de cada produto, podendo carregar quantos sacos desejar de um mesmo tipo, desde que o peso total não ultrapasse as 6 toneladas do caminhão.

Assim, o desafio do produtor é decidir quantos sacos de cada tipo deve transportar para maximizar o lucro total.

A tabela a seguir apresenta o peso e o lucro associado a cada tipo de produto:

Produto	**Peso por saco (toneladas)**	**Lucro por tonelada (R$ mil)**
1. Soja	1	8
2. Milho	2	14
3. Capim	3	20
4. Sorgo	4	25
5. Café	5	32

Como o produtor deve carregar o caminhão, podendo repetir tipos de sacos, para obter o maior lucro possível, sem ultrapassar a capacidade máxima de 6 toneladas?

Para determinar quais produtos devem ser carregados no caminhão de modo a maximizar o lucro possível, utilizaremos a função recursiva 7.1.

Inicialmente, organizamos as informações do problema em uma tabela, de modo a facilitar a análise dos dados e a aplicação da relação recursiva.

i	Soja (1)	Milho (2)	Capim (3)	Sorgo (4)	Café (5)
P_i	1	2	3	4	5
v_i	8	14	20	25	32

Passamos agora à aplicação da relação recursiva por estágios.

Condições iniciais:

$$z(i,0) = 0,$$
$$z(0,j) = 0.$$

Primeiro estágio

Nesse primeiro estágio, o índice i assume o valor 1, enquanto o índice j assume os valores 1 a 6, sendo este último correspondente à capacidade máxima do caminhão.

Calculamos, portanto, os valores de $z(1,1), \ldots, z(1,6)$:

$$\begin{aligned} z(1,1) = w(1,1) &= \max\{z(0,1); 8 + z(0,0)\} \\ &= \max\{0; 8+0\} \\ &= 8 \end{aligned}$$

Decisão: Levar 1 unidade do item 1

$$\begin{aligned} z(1,2) = w(1,2) &= \max\{z(0,2); 8 + z(0,1); 2 \cdot 8 + z(0,0)\} \\ &= \max\{0; 8; 16\} \\ &= 16 \end{aligned}$$

Decisão: Levar 2 unidades do item 1

$$\begin{aligned} z(1,3) = w(1,3) &= \max\{z(0,3); 8 + z(0,2); 2 \cdot 8 + z(0,1); 3 \cdot 8 + z(0,0)\} \\ &= \max\{0; 8; 16; 24\} \\ &= 24 \end{aligned}$$

Decisão: Levar 3 unidades do item 1

$$\begin{aligned} z(1,4) = w(1,4) &= \max\{z(0,4); 8 + z(0,3); 2 \cdot 8 + z(0,2); 3 \cdot 8 + z(0,1); \\ &\qquad 4 \cdot 8 + z(0,0)\} \\ &= \max\{0; 8; 16; 24; 32\} \\ &= 32 \end{aligned}$$

Decisão: Levar 4 unidades do item 1

$$\begin{aligned} z(1,5) = w(1,5) &= \max\{z(0,5); 8 + z(0,4); 2 \cdot 8 + z(0,3); 3 \cdot 8 + z(0,2); \\ &\qquad 4 \cdot 8 + z(0,1); 5 \cdot 8 + z(0,0)\} \\ &= \max\{0; 8; 16; 24; 32; 40\} \\ &= 40 \end{aligned}$$

Decisão: Levar 5 unidades do item 1

$$\begin{aligned} z(1,6) = w(1,6) &= \max\{z(0,6); 8 + z(0,5); 2 \cdot 8 + z(0,4); 3 \cdot 8 + z(0,3); \\ &\qquad 4 \cdot 8 + z(0,2); 5 \cdot 8 + z(0,1); 6 \cdot 8 + z(0,0)\} \\ &= \max\{0; 8; 16; 24; 32; 40; 48\} \\ &= 48 \end{aligned}$$

Decisão: Levar 6 unidades do item 1

Segundo estágio

Nesse segundo estágio, o índice i assume o valor 2, enquanto o índice j assume os valores de 1 a 6.

$$\begin{aligned} z(2,1) &= z(1,1) \\ &= 8 \end{aligned}$$

Decisão: Como o peso do item 1 excede a capacidade disponível ($p_2 > 1$), não é possível levá-lo.

$$\begin{aligned} z(2,2) = w(2,2) &= \max\{z(1,2); 14 + z(1,0)\} \\ &= \max\{16; 14\} \\ &= 16 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 2

$$\begin{aligned} z(2,3) = w(2,3) &= \max\{z(1,3); 14 + z(1,1)\} \\ &= \max\{24; 22\} \\ &= 24 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 2

$$\begin{aligned} z(2,4) = w(2,4) &= \max\{z(1,4); 14 + z(1,2); 2 \cdot 14 + z(1,0)\} \\ &= \max\{32; 30; 28\} \\ &= 32 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 2

$$z(2,5) = w(2,5) = \max\{z(1,5); 14 + z(1,3); 2 \cdot 14 + z(1,1)\}$$

$$= \max\{40; 38; 36\}$$
$$= 40$$

Decisão: Não levar o item 2

$$z(2,6) = w(2,6) = \max\{z(1,6); 14 + z(1,4); 2 \cdot 14 + z(1,2); 3 \cdot 14 + z(1,0)\}$$
$$= \max\{48; 46; 44; 42\}$$
$$= 48$$

Decisão: Não levar o item 2

Terceiro estágio

Nesse terceiro estágio, o índice i assume o valor 3, enquanto o índice j assume os valores de 1 a 6.

$$z(3,1) = z(2,1)$$
$$= 8$$

Decisão: Como o peso do item 3 excede a capacidade disponível ($p_3 > 1$), não é possível incluí-lo.

$$z(3,2) = z(2,2)$$
$$= 16$$

Decisão: Como o peso do item 3 excede a capacidade disponível ($p_3 > 2$), não é possível incluí-lo.

$$z(3,3) = w(3,3) = \max\{z(2,3); 20 + z(2,0)\}$$
$$= \max\{24; 20\}$$
$$= 24$$

Decisão: Não levar o item 3

$$z(3,4) = w(3,4) = \max\{z(2,4); 20 + z(2,1)\}$$
$$= \max\{32; 28\}$$
$$= 32$$

Decisão: Não levar o item 3

$$\begin{aligned} z(3,5) = w(3,5) &= \max\{z(2,5); 20 + z(2,2)\} \\ &= \max\{40; 36\} \\ &= 40 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 3

$$\begin{aligned} z(3,6) = w(3,6) &= \max\{z(2,6); 20 + z(2,3); 2 \cdot 20 + z(2,0)\} \\ &= \max\{48; 44; 40\} \\ &= 48 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 3

Quarto estágio

Nesse quarto estágio, o índice i assume apenas o valor 4, enquanto o índice j assume os valores de 1 a 6.

$$\begin{aligned} z(4,1) &= z(3,1) \\ &= 8 \end{aligned}$$

Decisão: Como o peso do item 4 excede a capacidade disponível ($p_4 > 1$), não é possível incluí-lo.

$$\begin{aligned} z(4,2) &= z(3,2) \\ &= 16 \end{aligned}$$

Decisão: Como o peso do item 4 excede a capacidade disponível ($p_4 > 2$), não é possível incluí-lo.

$$\begin{aligned} z(4,3) &= z(3,3) \\ &= 24 \end{aligned}$$

Decisão: Como o peso do item 4 excede a capacidade disponível ($p_4 > 3$), não é possível incluí-lo.

$$\begin{aligned} z(4,4) = w(4,4) &= \max\{z(3,4); 25 + z(3,0)\} \\ &= \max\{32; 25\} \end{aligned}$$

$$= 32$$

Decisão: Não levar o item 4

$$\begin{aligned} z(4,5) = w(4,5) &= \max\{z(3,5); 25 + z(3,1)\} \\ &= \max\{40; 33\} \\ &= 40 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 4

$$\begin{aligned} z(4,6) = w(4,6) &= \max\{z(3,6); 25 + z(3,2)\} \\ &= \max\{48; 41\} \\ &= 48 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 4

Quinto estágio

Nesse quinto e último estágio, o índice i assume o valor 5. Como o objetivo é determinar o valor ótimo correspondente à capacidade máxima do caminhão, não é necessário calcular os valores $z(5,1), \cdots, z(5,5)$, uma vez que tais valores não influenciam o cálculo de $z(5,6)$. Assim, determinamos diretamente:

$$\begin{aligned} z(5,6) = w(5,6) &= \max\{z(4,6); 32 + z(4,1)\} \\ &= \max\{48; 40\} \\ &= 48 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 5

Recuperando a solução ótima

O valor ótimo encontrado é $z(5,6) = 48$. Como $z(5,6) = z(4,6)$, conclui-se que o item 5 não foi transportado no caminhão.

De forma análoga, verifica-se que os itens 4, 3 e 2 também não foram transportados, pois seus valores não melhoram a solução obtida nos estágios anteriores.

Assim, conclui-se que a solução ótima consiste em transportar apenas o item 1.

Observa-se que

$$z(1,6) = 6 \cdot 8 + z(0,0) = 48,$$

o que indica que a melhor escolha foi tomar $x_1 = 6$, isto é, seis unidades do item 1. Essa escolha consome toda a capacidade do caminhão:

$$6 - 6 \cdot 1 = 0.$$

Portanto, a solução ótima é composta por seis toneladas de soja, e o lucro máximo obtido é de 48 mil reais.

7.4 Exercícios

1) [resp] (Adaptado de [11]) Um navio possui capacidade máxima de 4 toneladas. No porto, estão disponíveis três tipos de mercadorias, e há quantidade ilimitada de cada tipo para carregamento. A tabela abaixo apresenta, para cada tipo de item i, o peso unitário p_i, em toneladas, e a receita unitária v_i, em milhares de dólares:

Item (i)	**Peso** (p_i)	**Receita** (v_i)
1	2	31
2	3	47
3	1	14

Determine quantas unidades de cada item devem ser carregadas no navio, de modo a maximizar a receita total, sem ultrapassar a capacidade de 4 toneladas.

2) [resp] Um produtor rural precisa transportar insumos agrícolas de um depósito até uma área de plantio utilizando um pequeno caminhão com capacidade máxima de 5 toneladas. No depósito, há grande disponibilidade de quatro tipos de produtos, e o produtor pode transportar quantas cargas quiser de cada tipo, desde que respeite o limite de capacidade do caminhão. Cada tipo de produto possui um peso por carga e um valor econômico associado, conforme a tabela a seguir:

Produto	**Peso por carga (toneladas)**	**Valor econômico** $(R\$mil)$
1.Fertilizante	1	12
2.Ração animal	2	20
3.Sementes	3	33
4.Defensivo agrícola	4	40

Determine quantas cargas de cada produto devem ser transportadas para maximizar o valor econômico total, sem ultrapassar a capacidade de 5 toneladas do caminhão.

3) [resp] O deputado Bassam concorre à reeleição na jurisdição de Washington e dispõe de aproximadamente 7 mil dólares para investir em ações de campanha. Para ampliar seu alcance entre os eleitores, sua equipe pode contratar diferentes tipos de ações publicitárias, e há disponibilidade para contratar quantos lotes desejar de cada tipo, desde que o orçamento total não seja ultrapassado. Cada lote de ação possui um custo, em milhares de dólares, e proporciona um alcance estimado de eleitores, em milhares de

pessoas, conforme a tabela abaixo:

Zona	População (Mil)	Fundos requeridos (($) Mil)
1	3,1	3
2	2,6	2
3	3,5	4
4	2,8	3
5	2,4	2

Determine quantos lotes de cada tipo de ação devem ser contratados, de modo a maximizar o alcance total de eleitores, sem ultrapassar o orçamento de 7 mil dólares. [11]

8

Problema de Reposição

8.1 Introdução 129
8.2 Recuperação a solução ótima 131
8.3 Exemplos 131
8.4 Exercícios 147

8.1 Introdução

O problema de reposição de equipamentos consiste em determinar o momento mais adequado, do ponto de vista econômico, para substituir um equipamento ao longo de sua vida útil. De modo geral, à medida que o equipamento envelhece, observa-se o aumento progressivo dos custos de manutenção e operação, bem como a redução de sua produtividade ou eficiência.

Nesse contexto, a decisão envolve comparar os custos associados à permanência do equipamento em uso, tais como manutenção, falhas e perda de desempenho, com os custos de aquisição e instalação de um novo equipamento. Assim, o problema consiste em identificar a idade ou o instante que minimiza o custo total ao longo do tempo, caracterizando-se como um problema de decisão sequencial que pode ser modelado por meio da programação dinâmica.

Para a modelagem, considera-se um horizonte de planejamento finito, dividido em n períodos. O estágio i corresponde ao ano i, com $i = 1, 2, \ldots, n$. Em cada estágio, isto

é, em cada ano, o decisor deve escolher entre duas alternativas: manter o equipamento em operação ou substituí-lo por um novo no início do período.

O estado no estágio i é dado pela idade da máquina no início do ano i. Assim, se a máquina possui j anos nesse instante, define-se $z(i, j)$ como a receita líquida máxima obtida a partir dos anos $i, i + 1, \ldots, n$.

A relação recursiva associada ao problema é definida da seguinte forma. Caso a decisão seja manter o equipamento, o valor é dado por

$$m(i, j) = r(j) - c(j) + z(i + 1, j + 1),$$

enquanto, no caso de substituição, o valor é dado por

$$s(i, j) = r(0) - c(0) + s(j) - c + z(i + 1, 1).$$

Assim, a melhor decisão em cada estágio é obtida por

$$z(i, j) = \max \big\{ m(i, j),\, s(i, j) \big\}. \tag{8.1}$$

Em outras palavras, se $m(i, j) > s(i, j)$, a decisão ótima é manter o equipamento no estágio i; se $s(i, j) > m(i, j)$, a decisão ótima é substituí-lo. No caso em que $m(i, j) = s(i, j)$, ambas as decisões são ótimas, podendo-se optar por manter ou substituir o equipamento, o que implica a existência de mais de uma política ótima.

Nessa expressão, $r(j)$ representa a receita gerada por uma máquina com j anos de uso, $c(j)$ corresponde ao custo de operação e manutenção nessa idade, $s(j)$ indica o valor de revenda da máquina usada (sucata), e c é o custo de aquisição de uma nova máquina. Além disso, $r(0)$ representa a receita gerada por uma máquina nova (isto é, com zero ano de uso), enquanto $c(0)$ corresponde ao custo de operação e manutenção dessa máquina nova.

A resolução do problema é realizada de forma regressiva, iniciando-se no último estágio e avançando até o primeiro, de modo a determinar o valor ótimo associado a cada estado possível.

8.2 Recuperação a solução ótima

Após o preenchimento da tabela de valores $z(i, j)$, a política ótima de reposição é obtida por meio da análise das decisões que maximizam a função de valor em cada estágio.

O processo inicia-se no estágio $i = 1$, considerando a idade inicial da máquina. Em seguida, para cada estágio, verifica-se qual das alternativas, manter ou substituir, foi responsável pelo valor ótimo obtido.

Se a decisão ótima for manter, a máquina permanece em operação, e sua idade é incrementada em uma unidade no estágio seguinte. Caso contrário, se a decisão for substituir, a máquina é trocada por uma nova, e sua idade passa a ser igual a 1 no próximo estágio.

Esse procedimento é repetido sucessivamente até o último período, permitindo a determinação completa da política ótima de reposição ao longo do horizonte de planejamento.

8.3 Exemplos

Exemplo 8.3.1: Uma pequena empresa de marcenaria utiliza uma máquina de corte de madeira em seu processo produtivo e atualmente essa máquina possui 2 anos de uso. O proprietário deseja definir uma política de reposição para os próximos 3 anos e, ao final desse período de planejamento, a máquina que estiver em operação será vendida como sucata. O custo de aquisição de uma máquina nova é de R$ 20 mil, e a empresa estabelece como política que nenhuma máquina pode ultrapassar 5 anos de uso, devido ao aumento significativo dos custos de manutenção. A tabela a seguir apresenta, de acordo com a idade da máquina, a receita anual gerada pela produção, o custo operacional anual e o valor de revenda ou sucata.

Idade da máquina (anos)	Receita anual (R$ mil)	Custo operacional anual (R$ mil)	Valor de revenda /sucata (R$ mil)
0	12	2	20
1	11	3	16
2	10	4	13
3	9	5	10
4	8	6	7
5	7	7	5

Vamos determinar a política de reposição da máquina para os próximos 3 anos, de modo a maximizar a receita líquida total, utilizando a função recursiva (8.1).

$$m(i,j) = r(j) - c(j) + z(i+1, j+1)$$

$$s(i,j) = r(0) - c(0) + s(j) - c + z(i+1, 1)$$

$$z(i,j) = \max\{\, m(i,j),\, s(i,j)\,\}$$

$$\text{Decisão}(i,j) = \begin{cases} \text{manter}, & \text{se } m(i,j) > s(i,j), \\ \text{substituir}, & \text{se } s(i,j) > m(i,j), \end{cases}$$

Em seguida, iniciaremos a resolução fazendo uma representação da idade da máquina como função do ano de decisão, onde o par ordenado (i, j) representa a idade da máquina j e ano de decisão i. O objetivo é fazer menos cálculos.

As nossas condições iniciais são dadas pela tabela inicial, são elas:

$$z(4,1) = 16$$
$$z(4,2) = 13$$
$$z(4,3) = 10$$
$$z(4,4) = 7$$
$$z(4,5) = 5$$

A partir das condições iniciais, observa-se que a resolução será conduzida de forma regressiva.

Terceiro estágio

Nesse terceiro estágio, o índice i assume o valor 3, enquanto o índice j assume os valores $1, 2$ e 4.

$$\begin{aligned} m(3,1) &= r(1) - c(1) + z(4,2) \\ &= 11 - 3 + 13 \\ &= 21 \\ s(3,1) &= r(0) - c(0) + s(1) - c + z(4,1) \\ &= 12 - 2 + 16 - 20 + 16 \\ &= 22 \\ z(3,1) &= \max\{m(3,1); s(3,1)\} \\ &= \max\{21; 22\} \\ &= 22 \end{aligned}$$

Decisão: Substituir

$$\begin{aligned} m(3,2) &= r(2) - c(2) + z(4,3) \\ &= 10 - 4 + 10 \\ &= 16 \\ s(3,2) &= r(0) - c(0) + s(2) - c + z(4,1) \\ &= 12 - 2 + 13 - 20 + 16 \\ &= 19 \\ z(3,2) &= \max\{m(3,2); s(3,2)\} \\ &= \max\{16; 19\} \\ &= 19 \end{aligned}$$

Decisão: Substituir

$$\begin{aligned} m(3,4) &= r(4) - c(4) + z(4,5) \\ &= 8 - 6 + 5 \\ &= 7 \\ s(3,4) &= r(0) - c(0) + s(4) - c + z(4,1) \\ &= 12 - 2 + 7 - 20 + 16 \\ &= 13 \\ z(3,4) &= \max\{m(3,4); s(3,4)\} \\ &= \max\{7; 13\} \end{aligned}$$

$$= 13$$

Decisão: Substituir

Segundo estágio

Nesse segundo estágio, o índice i assume o valor 2, enquanto o índice j assume os valores 1 e 3.

$$\begin{aligned} m(2,1) &= r(1) - c(1) + z(3,2) \\ &= 11 - 3 + 19 \\ &= 27 \\ s(2,1) &= r(0) - c(0) + s(1) - c + z(3,1) \\ &= 12 - 2 + 16 - 20 + 22 \\ &= 28 \\ z(2,1) &= \max\{m(2,1); s(2,1)\} \\ &= \max\{27; 28\} \\ &= 28 \end{aligned}$$

Decisão: Substituir

$$\begin{aligned} m(2,3) &= r(3) - c(3) + z(3,4) \\ &= 9 - 5 + 13 \\ &= 17 \\ s(2,3) &= r(0) - c(0) + s(3) - c + z(3,1) \\ &= 12 - 2 + 10 - 20 + 22 \\ &= 22 \\ z(2,3) &= \max\{m(2,3); s(2,3)\} \\ &= \max\{17; 22\} \\ &= 22 \end{aligned}$$

Decisão: Substituir

Primeiro estágio

Nesse primeiro estágio, o índice i assume o valor 1, enquanto o índice j assume

o valor 2.

$$
\begin{aligned}
m(1,2) &= r(2) - c(2) + z(2,3) \\
&= 10 - 4 + 22 \\
&= 28 \\
s(1,2) &= r(0) - c(0) + s(2) - c + z(2,1) \\
&= 12 - 2 + 13 - 20 + 28 \\
&= 31 \\
z(1,2) &= \max\{m(1,2); s(1,2)\} \\
&= \max\{28; 31\} \\
&= 31
\end{aligned}
$$

Decisão: Substituir

Recuperação da solução ótima

A recuperação da política ótima é realizada a partir do estado inicial do problema, seguindo, de forma regressiva, as decisões que geraram os valores ótimos obtidos na etapa anterior da programação dinâmica.

O processo inicia-se no estágio correspondente ao primeiro ano do horizonte de planejamento, considerando que a máquina possui idade inicial de 2 anos.

No estágio $i = 1$, estado $j = 2$, observa-se que o valor ótimo $z(1,2) = 31$ foi obtido por meio da decisão de **substituir** a máquina, uma vez que essa alternativa fornece valor superior ao da decisão de mantê-la. Assim, ao final do primeiro ano, a máquina passa a ter idade 1.

No estágio $i = 2$, estado $j = 1$, verifica-se que o valor ótimo $z(2,1) = 28$ também foi obtido pela decisão de **substituir** a máquina. Portanto, ao final do segundo ano, a nova máquina passa novamente a ter idade 1.

No estágio $i = 3$, estado $j = 1$, observa-se que o valor ótimo $z(3,1) = 22$ é obtido, mais uma vez, pela decisão de **substituir** a máquina.

Dessa forma, a receita líquida máxima é de 31 mil reais, sendo obtida pela política ótima que consiste em substituir a máquina no início de cada um dos três anos do horizonte de planejamento.

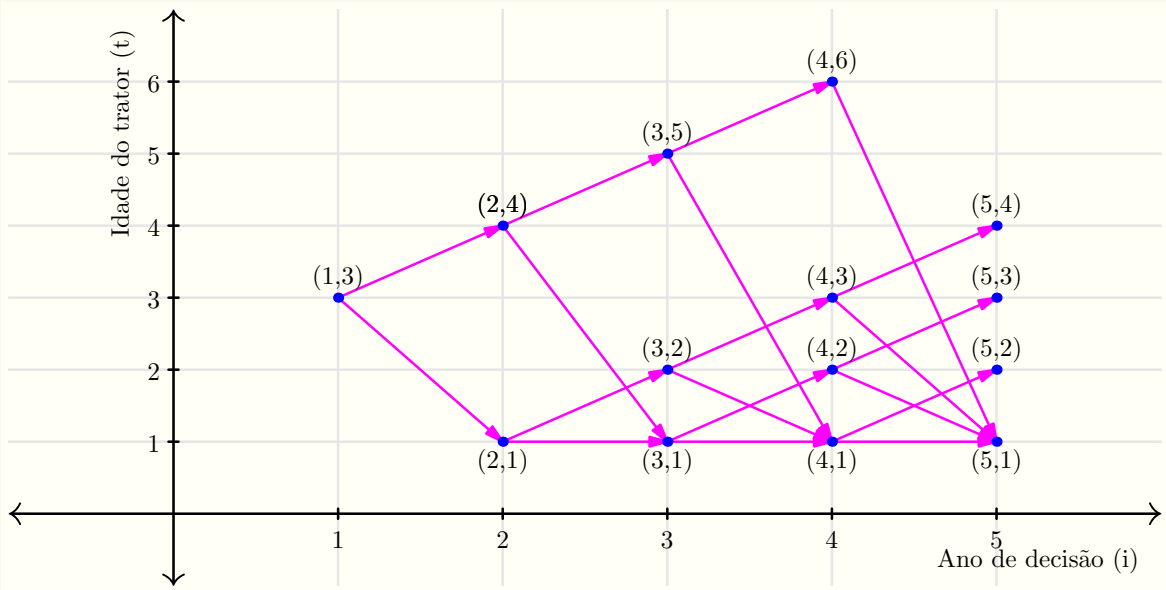
Ao final do período, a máquina em operação é vendida como sucata, conforme estabelecido nas condições do problema.

Exemplo 8.3.2: A John Deere possui atualmente um trator com 3 anos de uso e deseja definir uma política de reposição para os próximos 4 anos. Ao final desse período, o trator em operação será vendido como sucata. O custo de aquisição de um trator novo é de $R\$$ 500 mil, e a empresa estabelece que nenhuma máquina pode ultrapassar 6 anos de uso. A tabela a seguir apresenta, de acordo com a idade do trator, a receita anual, o custo operacional anual e o valor de revenda ou sucata. Em cada ano, a empresa pode optar por manter o trator atual em operação por mais um ano ou substituí-lo por um trator novo. Determine, por meio da programação dinâmica, a política ótima de reposição ao longo dos próximos 4 anos, de modo a maximizar a receita líquida total.

Idade do trator (anos)	**Receita anual (R$ mil)**	**Custo operacional anual (R$ mil)**	**Valor de revenda /sucata (R$ mil)**
0	260	55	500
1	250	60	420
2	235	72	340
3	220	88	270
4	205	108	210
5	190	132	160
6	175	160	120

Vamos determinar a política de reposição da John Deere para os próximos 4 anos, de modo a maximizar a receita líquida total, utilizando a função recursiva (8.1).

Em seguida, iniciaremos a resolução fazendo uma representação da idade do trator como função do ano de decisão, onde o par ordenado (i, j) representa idade do trator j e ano de decisão i. O objetivo é fazer menos cálculos.



As nossas condições iniciais são dadas pela tabela inicial, são elas:

$$z(5,1) = 420$$
$$z(5,2) = 340$$
$$z(5,3) = 270$$
$$z(5,4) = 210$$

Pela condição inicial dada, podemos notar que utilizaremos progressão recursiva na resolução.

Quarto estágio

Nesse quarto estágio, o índice i assume apenas o valor 4, enquanto o índice j assume os valores de 1, 2, 3 e 6.

$$\begin{aligned} m(4,1) &= r(1) - c(1) + z(5,2) \\ &= 250 - 60 + 340 \\ &= 530 \\ s(4,1) &= r(0) - c(0) + s(1) - c + z(5,1) \\ &= 260 - 55 + 420 - 500 + 420 \\ &= 545 \\ z(4,1) &= \max\{m(4,1); s(4,1)\} \\ &= \max\{530; 545\} = 545 \end{aligned}$$

Decisão: Substituir

$$\begin{aligned} m(4,2) &= r(2) - c(2) + z(5,3) \\ &= 235 - 72 + 270 \\ &= 433 \\ s(4,2) &= r(0) - c(0) + s(2) - c + z(5,1) \\ &= 260 - 55 + 340 - 500 + 420 \\ &= 465 \\ z(4,2) &= \max\{m(4,2); s(4,2)\} \\ &= \max\{433; 465\} = 465 \end{aligned}$$

Decisão: Substituir

$$\begin{aligned} m(4,3) &= r(3) - c(3) + z(5,4) \\ &= 220 - 88 + 210 \\ &= 342 \\ s(4,3) &= r(0) - c(0) + s(3) - c + z(5,1) \\ &= 260 - 55 + 270 - 500 + 420 \\ &= 395 \\ z(4,3) &= \max\{m(4,3); s(4,3)\} \\ &= \max\{342; 395\} = 395 \end{aligned}$$

Decisão: Substituir

$$\begin{aligned} s(4,6) &= r(0) - c(0) + s(6) - c + z(5,1) \\ &= 260 - 55 + 120 - 500 + 420 \\ &= 245 \\ z(4,6) &= \max\{s(4,6)\} \\ &= \max\{245\} = 245 \end{aligned}$$

Decisão: Substituir.

Observação: A empresa estabelece que nenhuma máquina pode ultrapassar 6 anos de uso. Por esse motivo, não apresentamos a opção de manter, isto é, $m(4,6)$. Nesse caso, a substituição é obrigatória.

Terceiro estágio

Nesse terceiro estágio, o índice i assume o valor 3, enquanto o índice j assume os valores 1, 2 e 5.

$$\begin{aligned} m(3,1) &= r(1) - c(1) + z(4,2) \\ &= 250 - 60 + 465 \\ &= 655 \\ s(3,1) &= r(0) - c(0) + s(1) - c + z(4,1) \\ &= 260 - 55 + 420 - 500 + 545 \\ &= 670 \\ z(3,1) &= \max\{m(3,1); s(3,1)\} \\ &= \max\{655; 670\} = 670 \end{aligned}$$

Decisão: Substituir

$$\begin{aligned} m(3,2) &= r(2) - c(2) + z(4,3) \\ &= 235 - 72 + 395 \\ &= 558 \\ s(3,2) &= r(0) - c(0) + s(2) - c + z(4,1) \\ &= 260 - 55 + 340 - 500 + 545 \\ &= 590 \\ z(3,2) &= \max\{m(3,2); s(3,2)\} \\ &= \max\{558; 590\} = 590 \end{aligned}$$

Decisão: Substituir

$$\begin{aligned} m(3,5) &= r(5) - c(5) + z(4,6) \\ &= 190 - 132 + 245 \\ &= 303 \\ s(3,5) &= r(0) - c(0) + s(5) - c + z(4,1) \\ &= 260 - 55 + 160 - 500 + 545 \\ &= 410 \\ z(3,5) &= \max\{m(3,5); s(3,5)\} \\ &= \max\{303; 410\} = 410 \end{aligned}$$

Decisão: Substituir

Segundo estágio

Nesse segundo estágio, o índice i assume o valor 2, enquanto o índice j assume os valores 1 e 2.

$$\begin{aligned} m(2,1) &= r(1) - c(1) + z(3,2) \\ &= 250 - 60 + 590 \\ &= 780 \\ s(2,1) &= r(0) - c(0) + s(1) - c + z(3,1) \\ &= 260 - 55 + 420 - 500 + 670 \\ &= 795 \\ z(2,1) &= \max\{m(2,1); s(2,1)\} \\ &= \max\{780; 795\} = 795 \end{aligned}$$

Decisão: Substituir

$$\begin{aligned} m(2,4) &= r(4) - c(4) + z(3,5) \\ &= 205 - 108 + 410 \\ &= 507 \\ s(2,4) &= r(0) - c(0) + s(4) - c + z(3,1) \\ &= 260 - 55 + 210 - 500 + 670 \\ &= 585 \\ z(2,4) &= \max\{m(2,4); s(2,4)\} \\ &= \max\{507; 585\} = 585 \end{aligned}$$

Decisão: Substituir

Primeiro estágio

Nesse primeiro estágio, o índice i assume o valor 1, enquanto o índice j assume o valor 3.

$$\begin{aligned} m(1,3) &= r(3) - c(3) + z(2,4) \\ &= 220 - 88 + 585 \\ &= 717 \\ s(1,3) &= r(0) - c(0) + s(3) - c + z(2,1) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 260 - 55 + 270 - 500 + 795 \\
&= 770 \\
z(1,3) &= \max\{m(1,3); s(1,3)\} \\
&= \max\{717; 770\} = 770
\end{aligned}
$$

Decisão: Substituir

Recuperação da solução ótima

A recuperação da política ótima é realizada a partir do estado inicial do problema, seguindo, de forma regressiva, as decisões que geraram os valores ótimos obtidos na etapa anterior da programação dinâmica.

O processo inicia-se no estágio correspondente ao primeiro ano do horizonte de planejamento, considerando que o trator possui idade inicial de 3 anos.

No estágio $i = 1$, estado $j = 3$, observa-se que o valor ótimo $z(1,3) = 770$ foi obtido por meio da decisão de **substituir** o trator, uma vez que essa alternativa fornece valor superior ao da decisão de mantê-la. Assim, ao final do primeiro ano, o trator passa a ter idade 1.

No estágio $i = 2$, estado $j = 1$, verifica-se que o valor ótimo $z(2,1) = 795$ também foi obtido pela decisão de **substituir** o trator. Portanto, ao final do segundo ano, o novo trator passa novamente a ter idade 1.

No estágio $i = 3$, estado $j = 1$, observa-se que o valor ótimo $z(3,1) = 670$ é obtido, mais uma vez, pela decisão de **substituir** o trator.

No estágio $i = 4$, estado $j = 1$, observa-se que o valor ótimo $z(4,1) = 545$ é obtido, mais uma vez, pela decisão de **substituir** o trator.

Dessa forma, a receita máxima é 770 mil reais e pode ser obtida seguindo a política ótima que consiste em substituir o trator no início de cada um dos quatro anos desse período de planejamento.

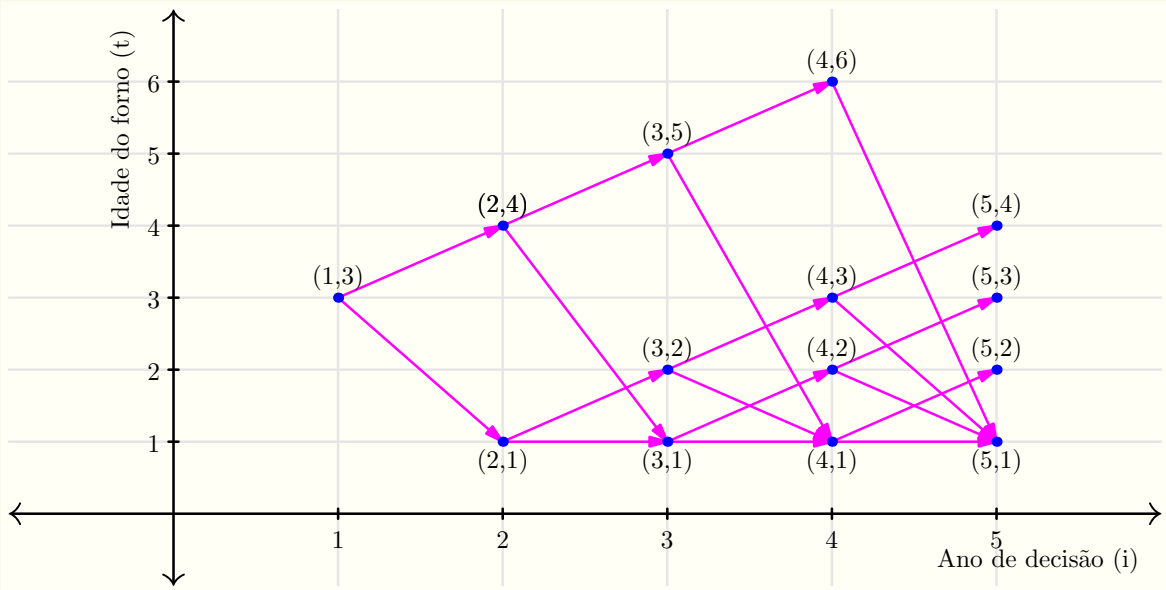
Ao final do período, o trator em operação é vendido como sucata, conforme estabelecido nas condições do problema.

Exemplo 8.3.3: Dona Geralda administra uma padaria bastante conhecida pela qualidade de seus pães. Ela utiliza um forno elétrico, que possui atualmente três anos de idade, para manter a produção diária. Com o passar do tempo, Dona Geralda percebeu que o forno começou a apresentar maior consumo de energia e pequenos defeitos, aumentando os custos de manutenção. Além disso, fornos novos disponíveis no mercado são mais eficientes e permitem uma produção mais rápida. Preocupada com os custos, Dona Geralda deseja definir o momento mais adequado para substituir o forno atual por um novo. Seu objetivo é minimizar o custo total ao longo de um horizonte de planejamento de 4 anos. Sabe-se que o custo de aquisição de um forno novo é de $R\$$ 8.000, e Dona Geralda pretende substitui o forno sempre que completar 6 anos de uso. A Tabela (8.3) apresenta os dados do problema.

Idade do forno (anos)	**Receita (R$ Mil)**	**Custo de manutenção (R$ Mil)**	**Valor de revenda (R$ Mil)**
0	12	0,3	7
1	11,5	0,5	6
2	10,8	0,8	5
3	10	1,2	4
4	9	1,7	3
5	7,8	2,3	2

Vamos determinar a política de reposição da máquina para os próximos 4 anos, de modo a minimizar o custo total, utilizando a função recursiva (8.1).

Com o objetivo de evitar-se cálculos desnecessários, faremos uma representação da idade do forno j como função do ano da decisão i.



Condições iniciais

$$z(5;\ 1) = 6$$
$$z(5;\ 2) = 5$$
$$z(5;\ 3) = 4$$
$$z(5;\ 4) = 3$$

Quarto estágio Analisando o plano cartesiano, nesse quarto estágio, o índice i assume apenas o valor 4, enquanto o índice j assume os valores 1, 2, 3 e 6.

$$\begin{aligned} m(4;\ 1) &= r(1) - c(1) + z(5;\ 2) \\ &= 11{,}5 - 0{,}5 + 5 \\ &= 16 \\ s(4;\ 1) &= r(0) - c(0) + s(1) - c + z(5;\ 1) \\ &= 12 - 0{,}3 + 6 - 8 + 6 \\ &= 15{,}7 \\ z(4;\ 1) &= \max\{m(4;\ 1);\ s(4;\ 1)\} \\ &= \max\{16;\ 15{,}7\} = 16 \end{aligned}$$

Decisão: Manter

$$\begin{aligned} m(4;\ 2) &= r(2) - c(2) + z(5;\ 3) \\ &= 10{,}8 - 0{,}8 + 4 \end{aligned}$$

$$= 14$$

$$s(4;\ 2) = r(0) - c(0) + s(2) - c + z(5;\ 1)$$
$$= 12 - 0{,}3 + 5 - 8 + 6$$
$$= 14{,}7$$

$$z(4;\ 2) = \max\{m(4;\ 2);\ s(4;\ 2)\}$$
$$= \max\{14;\ 14{,}7\} = 14{,}7$$

Decisão: Substituir

$$m(4;\ 3) = r(3) - c(3) + z(5;\ 4)$$
$$= 10 - 1{,}2 + 3$$
$$= 11{,}8$$

$$s(4;\ 3) = r(0) - c(0) + s(3) - c + z(5;\ 1)$$
$$= 12 - 0{,}3 + 4 - 8 + 6$$
$$= 13{,}7$$

$$z(4;\ 3) = \max\{m(4;\ 3);\ s(4;\ 3)\}$$
$$= \max\{11{,}8;\ 13{,}7\} = 13{,}7$$

Decisão: Substituir

$$s(4;\ 6) = r(0) - c(0) + s(6) - c + z(5;\ 1)$$
$$= 12 - 0{,}3 + 1 - 8 + 6$$
$$= 10{,}7$$

$$z(4;\ 6) = \max\{s(4;\ 6)\}$$
$$= \max\{10{,}7\} = 10{,}7$$

Decisão: Substituir.

Terceiro estágio

Analisando novamente o plano cartesiano, temos que nesse terceiro estágio, o índice i assume o valor 3, enquanto o índice j assume os valores $1, 2$ e 5.

$$m(3;\ 1) = r(1) - c(1) + z(4;\ 2)$$
$$= 11{,}5 - 0{,}5 + 14{,}7$$

$$= 25{,}7$$

$$\begin{aligned} s(3;\ 1) &= r(0) - c(0) + s(1) - c + z(4;\ 1) \\ &= 12 - 0{,}3 + 6 - 8 + 16 \\ &= 25{,}7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(3;\ 1) &= \max\{m(3;\ 1);\ s(3;\ 1)\} \\ &= \max\{25{,}7;\ 25{,}7\} = 25{,}7 \end{aligned}$$

Decisão: Manter ou Substituir

$$\begin{aligned} m(3;\ 2) &= r(2) - c(2) + z(4;\ 3) \\ &= 10{,}8 - 0{,}8 + 13{,}7 \\ &= 23{,}7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(3;\ 2) &= r(0) - c(0) + s(2) - c + z(4;\ 1) \\ &= 12 - 0{,}3 + 5 - 8 + 16 \\ &= 24{,}7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(3;\ 2) &= \max\{m(3;\ 2);\ s(3;\ 2)\} \\ &= \max\{23{,}7;\ 24{,}7\} \\ &= 24{,}7 \end{aligned}$$

Decisão: Substituir

$$\begin{aligned} m(3;\ 5) &= r(5) - c(5) + z(4;\ 6) \\ &= 7{,}8 - 2{,}3 + 10{,}7 \\ &= 16{,}2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(3;\ 5) &= r(0) - c(0) + s(5) - c + z(4;\ 1) \\ &= 12 - 0{,}3 + 2 - 8 + 16 \\ &= 21{,}7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(3;\ 5) &= \max\{m(3;\ 5);\ s(3;\ 5)\} \\ &= \max\{16{,}2;\ 21{,}7\} = 21{,}7 \end{aligned}$$

Decisão: Substituir

Segundo estágio

Nesse segundo estágio, o índice i assume o valor 2, enquanto o índice j assume

os valores 1 e 4.

$$\begin{aligned} m(2;\ 1) &= r(1) - c(1) + z(3;\ 2) \\ &= 11{,}5 - 0{,}5 + 24{,}7 \\ &= 35{,}7 \\ s(2;\ 1) &= r(0) - c(0) + s(1) - c + z(3;\ 1) \\ &= 12 - 0{,}3 + 6 - 8 + 25{,}7 \\ &= 35{,}4 \\ z(2;\ 1) &= \max\{m(2;\ 1);\ s(2;\ 1)\} \\ &= \max\{35{,}7;\ 35{,}4\} = 35{,}7 \end{aligned}$$

Decisão: Manter

$$\begin{aligned} m(2;\ 4) &= r(4) - c(4) + z(3;\ 5) \\ &= 9 - 1{,}7 + 21{,}7 \\ &= 29 \\ s(2;\ 4) &= r(0) - c(0) + s(4) - c + z(3;\ 1) \\ &= 12 - 0{,}3 + 3 - 8 + 25{,}7 \\ &= 32{,}4 \\ z(2;\ 4) &= \max\{m(2;\ 4);\ s(2;\ 4)\} \\ &= \max\{29;\ 32{,}4\} = 32{,}4 \end{aligned}$$

Decisão: Substituir

Primeiro estágio

Nesse primeiro estágio, o índice i assume o valor 1, enquanto o índice j assume o valor 3.

$$\begin{aligned} m(1;\ 3) &= r(3) - c(3) + z(2;\ 4) \\ &= 10 - 1{,}2 + 32{,}4 \\ &= 41{,}2 \\ s(1;\ 3) &= r(0) - c(0) + s(3) - c + z(2;\ 1) \\ &= 12 - 0{,}3 + 4 - 8 + 35{,}7 \\ &= 43{,}4 \\ z(1;\ 3) &= \max\{m(1;\ 3);\ s(1;\ 3)\} \end{aligned}$$

$$= \max\{41{,}2;\ 43{,}4\} = 43{,}4$$

Decisão: Substituir

Recuperação da solução ótima

No primeiro estágio, observa-se que o valor ótimo $z(1;\ 3) = 43{,}4$ foi obtido por meio da decisão de **substituir** o forno.

No segundo estágio, verifica-se que o valor ótimo $z(2;\ 1) = 35{,}7$ foi obtido pela decisão de **manter** o forno.

No terceiro estágio, observa-se que o valor ótimo $z(3;\ 2) = 24{,}7$ é obtido, mais uma vez, pela decisão de **substituir** o forno.

No quarto estágio, observa-se que o valor ótimo $z(4;\ 1) = 16$ é obtido, pela decisão de **manter** o forno.

Dessa forma, resolvendo o problema de forma regressiva, obtém-se que, partindo de um forno com 3 anos de idade, a política ótima consiste em substituir o forno no primeiro ano, mantê-lo no segundo, substituí-lo no terceiro e mantê-lo no quarto. O retorno líquido total máximo obtido ao longo do horizonte de planejamento é de 43,4 mil reais.

8.4 Exercícios

1) [resp] Meu filho de 13 anos de idade, presta serviços de corte de grama a dez clientes. Para cada um deles, ele corta a grama três vezes por ano, o que lhe rende 50 reais por cada corte. Ele acabou de pagar 200 reais por um novo cortador de grama. O custo de manutenção e operação do cortador é 120 reais para o primeiro ano de serviço, aumentando nos anos seguintes. Um cortador de 1 ano de idade tem valor de revenda de 150 reais, sofrendo depreciação nos anos seguintes, conforme indicado na tabela. Meu filho, que planeja manter seu negócio até os 16 anos de idade, acha que é mais econômico comprar um novo cortador a cada dois anos, cujo custo de aquisição permanece constante em $R$$ 200. Sua decisão é justificável? [11]

Idade (anos)	Receita anual (R$)	Custo operacional (R$)	Valor de revenda (R$)
0	1500	120	–
1	1500	140	150
2	1500	170	135
3	1500	200	120

2) [resp] Uma empresa precisa determinar a política ótima de reposição para os próximos quatro anos, para uma maquina que atualmente tem três anos de idade. A empresa exige que uma máquina de seis anos seja substituída. O custo de uma nova máquina é $R\$$ 100 mil. A tabela abaixo apresenta os dados do problema. [11]

Idade (anos)	Receita (R$ Mil)	Custo (R$ Mil)	Sucata (R$ Mil)
0	20	0,2	-
1	19	0,6	80
2	18,5	1,2	60
3	17,2	1,5	50
4	15,5	1,7	30
5	14	1,8	10
6	12,2	2,2	5

3) [resp] Uma propriedade agrícola utiliza um trator para preparo do solo. Atualmente, o trator possui 2 anos de uso, e o produtor deseja definir uma política ótima de reposição para os próximos 4 anos. Ao final desse período de planejamento, o trator que estiver em operação será vendido como sucata. O custo de aquisição de um trator novo é de $R\$$ 30 mil, e a propriedade adota a política de que nenhum trator pode ultrapassar 5 anos de uso, devido ao aumento significativo dos custos de manutenção e ao risco de falhas. A tabela a seguir apresenta, de acordo com a idade do trator, a receita anual gerada pelas operações agrícolas, o custo operacional anual e o valor de revenda ou sucata.

Idade (anos)	Receita ($R\$$ mil)	Custo ($R\$$ mil)	Sucata ($R\$$ mil)
0	18	4	30
1	17	5	24
2	16	6	20
3	14	7	16
4	12	9	12
5	10	11	8

Em cada ano, o produtor pode decidir entre manter o trator atual ou substituí-lo por um novo. Ao substituir, o trator atual é vendido pelo valor de revenda correspondente à sua idade, e um novo trator é adquirido.

a) Determine a política ótima de reposição do trator ao longo dos 4 anos de planejamento.

b) Em quais anos o trator deve ser substituído?

c) Qual é o retorno econômico total máximo obtido?

d) A política de substituir o trator a cada 2 anos é ótima? Justifique.

9

Considerações Finais

A elaboração desta apostila teve como principal objetivo aproximar a Matemática de situações que fazem parte do cotidiano dos estudantes. Desde o início, a intenção não foi apenas apresentar um novo conteúdo, mas mostrar que muitos problemas enfrentados no dia a dia podem ser analisados de forma lógica, organizada e fundamentada por meio da Matemática. Perguntas como "qual é a melhor escolha?", "qual caminho devo seguir?" ou "como utilizar melhor os recursos disponíveis?" motivaram a elaboração deste material.

Ao longo dos capítulos, buscou-se desenvolver essas ideias de forma gradual, partindo de conteúdos já conhecidos pelos estudantes do Ensino Médio. As funções recursivas e os problemas de máximos e mínimos foram apresentados não como temas isolados, mas como conceitos que se complementam e conduzem naturalmente ao estudo de grafos, de caminhos mínimos e da programação dinâmica. A opção por essa sequência buscou favorecer uma aprendizagem progressiva e significativa.

Os problemas da Mochila e de Reposição foram escolhidos, entre outros problemas clássicos da programação dinâmica, para evidenciar que esse método vai muito além de um procedimento algorítmico. A programação dinâmica representa uma maneira de pensar, de comparar alternativas e de tomar decisões fundamentadas. Mais do que encontrar respostas, esse método ensina a organizar o raciocínio, identificar padrões, dividir problemas complexos em partes menores e mais simples e compreender que uma boa decisão é resultado de um processo de análise.

Ao concluir esta apostila, espera-se que o leitor perceba que a programação dinâmica não é um tema distante da matemática escolar. Pelo contrário, ela pode ser

compreendida a partir de conhecimentos já presentes no currículo e servir como elo entre diferentes conteúdos matemáticos. Mais do que ampliar o repertório dos estudantes, essa abordagem favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico, da autonomia intelectual e da capacidade de justificar escolhas, competências cada vez mais importantes dentro e fora da escola.

Não foi objetivo desta apostila substituir conteúdos do currículo do Ensino Médio, tampouco complementá-los de modo direto. O material foi concebido como apoio a atividades extracurriculares e destinado a estudantes interessados em aprofundar seus conhecimentos e desenvolver habilidades relacionadas ao pensamento computacional, à modelagem matemática e à resolução estruturada de problemas. Sem interferir na organização curricular vigente, o texto busca ampliar o horizonte formativo dos estudantes.

Espera-se, ainda, que este material incentive professores a explorar novas possibilidades em sala de aula e desperte nos estudantes a curiosidade por temas que, muitas vezes, permanecem restritos ao Ensino Superior. Aos leitores interessados em aprofundar seus conhecimentos em Pesquisa Operacional e em conhecer outros problemas e métodos de otimização, recomenda-se a leitura da obra de Taha [11]. Se esta apostila conseguir mostrar que a Matemática é uma ferramenta para compreender situações reais, analisar alternativas e tomar melhores decisões, ela terá alcançado o propósito que motivou sua elaboração.

Assim como no início desta obra foi feito o convite para olhar a Matemática sob uma nova perspectiva, estas páginas se encerram renovando esse mesmo convite. Que a programação dinâmica seja vista não apenas como um método de resolução de problemas, mas como uma maneira de pensar, capaz de transformar perguntas em estratégias, estratégias em soluções e soluções em conhecimento.

Respostas

Capítulo 2

1) Este exercício pode ser Resolvido de forma progressiva ou regressiva, iremos resolver de forma progressiva.

$$A(1) = 2$$
$$A(2) = A(1) + 3 = 2 + 3 = 5$$
$$A(3) = A(2) + 3 = 5 + 3 = 8$$
$$A(4) = A(3) + 3 = 8 + 3 = 11$$
$$A(5) = A(4) + 3 = 11 + 3 = 14$$

Portanto, o quinto termo da progressão aritmética é 14.

2) Calculando o quinto termo da progressão geométrica de forma progressiva, lembrando que o mesmo exercício também pode ser calculado de forma regressiva.

$$G(1) = 3$$
$$G(2) = G(1) \cdot 2 = 2 \cdot 3 = 6$$
$$G(3) = G(2) \cdot 2 = 6 \cdot 2 = 12$$
$$G(4) = G(3) \cdot 2 = 12 \cdot 2 = 24$$
$$G(5) = G(4) \cdot 2 = 24 \cdot 2 = 48$$

Portanto, o quinto termo da progressão Geométrica é 48.

3) Como $C(0) = 20$ é par,

$$C(1) = \frac{20}{2} = 10$$

O número 10 também é par,

$$C(2) = \frac{10}{2} = 5.$$

O número 5 é ímpar,

$$C(3) = 3 \cdot 5 + 1 = 16.$$

O número 16 é par,

$$C(4) = \frac{16}{2} = 8.$$

O número 8 é par,

$$C(5) = \frac{8}{2} = 4.$$

O número 4 é par,

$$C(6) = \frac{4}{2} = 2.$$

O número 2 é par,

$$C(7) = \frac{2}{2} = 1.$$

Portanto, a sequência completa é:

$$20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.$$

4) Vamos resolver o exercício utilizando definição recursiva, foco do nosso trabalho.

$$D(n) = \begin{cases} 2, & n = 1 \\ D(n-1) + 0{,}5, & n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

Assim,

$$D(1) = 2$$
$$D(2) = D(1) + 0{,}5 = 2 + 0{,}5 = 2{,}5$$
$$D(3) = D(2) + 0{,}5 = 2{,}5 + 0{,}5 = 3$$
$$D(4) = D(3) + 0{,}5 = 3 + 0{,}5 = 3{,}5$$
$$D(5) = D(4) + 0{,}5 = 3{,}5 + 0{,}5 = 4$$

Portanto, a resposta é 4 km. Letra C

5) Vamos utilizar recursão na resolução.

$$C(n) = \begin{cases} 200, & n = 1 \\ C(n-1) + 10, & n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

$$\begin{aligned} C(1) &= 200 \\ C(2) &= C(1) + 10 = 200 + 10 = 210 \\ C(3) &= C(2) + 10 = 210 + 10 = 220 \\ C(4) &= C(3) + 10 = 220 + 10 = 230 \end{aligned}$$

Portanto, a resposta é 230 Kwh. Letra C

6) Resolvendo utilizando recursão, temos:

$$S(n) = \begin{cases} 1000, & n = 0 \\ 1{,}01 \cdot S(n-1), & n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S(0) &= 1000 \\ s(1) &= 1{,}01 \cdot S(0) = 1{,}01 \cdot 1000 = 1010{,}00 \\ S(2) &= 1{,}01 \cdot S(1) = 1{,}01 \cdot 1010 = 1020{,}10 \end{aligned}$$

Portanto, a resposta é R$ 1020,10. Letra B

7)

$$A(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ A(n-1) + 2(n-1), & n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A(1) &= 1 \\ A(2) &= A(1) + 2 \cdot 1 = 1 + 2 = 3 \\ A(3) &= A(2) + 2 \cdot 2 = 3 + 4 = 7 \\ A(4) &= A(3) + 2 \cdot 3 = 7 + 6 = 13 \\ A(5) &= A(4) + 2 \cdot 4 = 13 + 8 = 21 \end{aligned}$$

O valor do quinto termo dessa sequência é 21. Letra C.

8)

$$B(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2B(n-1), & n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

$$\begin{aligned} B(0) &= 1 \\ B(1) &= 2 \cdot B(0) = 2 \cdot 1 = 2 \\ B(2) &= 2 \cdot B(1) = 2 \cdot 2 = 4 \\ B(3) &= 2 \cdot B(2) = 2 \cdot 4 = 8 \\ B(4) &= 2 \cdot B(3) = 2 \cdot 8 = 16 \\ B(5) &= 2 \cdot B(4) = 2 \cdot 16 = 32 \end{aligned}$$

Após 5 horas, o número de bactérias presentes será de 32. Letra D.

Capítulo 3

1) Como o coeficiente de x^2 é $(-2) < 0$, o gráfico dessa função é uma parábola com concavidade voltada para baixo, o que significa que o lucro atinge um valor máximo no vértice da parábola.
O valor de x correspondente ao vértice é dado por:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b}{2a} \\ &= \frac{-400}{2 \cdot (-2)} \\ &= \frac{400}{4} \\ &= 100 \end{aligned}$$

Logo, para que o lucro seja máximo, a empresa deve vender 100 camisetas.
Resposta correta: D

2) Como o coeficiente de x^2 é $(1) > 0$, o gráfico dessa função é uma parábola com concavidade voltada para cima, o que significa que a função possei um valor mínimo no vértice da parábola.
O valor de x correspondente ao vértice é dado por:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b}{2a} \\ x &= \frac{-(-20)}{2 \cdot 1} \\ x &= \frac{20}{2} \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Logo, para que o custo seja mínimo, a empresa deve produzir 10 unidades.
Resposta correta: B

3) A Função do lucro é:

$$L(x) = -x^2 + 14x - 45$$

Como essa função é uma parábola com concavidade para baixo, o maior lucro ocorre no vértice. A coordenada x do vértice é dada por:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

Nesse caso: $a = -1$ e $b = 14$ Logo:

$$x_v = \frac{-14}{2 \cdot (-1)} = \frac{-14}{-2} = 7$$

Portanto, o maior lucro ocorre quando o preço da barra é $x = 7$. Na lista de preços, a barra que custa R$ 7,00 é a barra IV.
Resposta correta: D

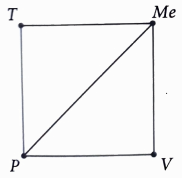
4) Para abrir a porta, a temperatura deve atingir 39 °C. Então fazemos:

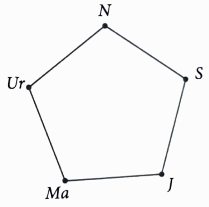
$$-\frac{t^2}{4} + 400 = 39$$
$$-\frac{t^2}{4} = 39 - 400$$
$$-\frac{t^2}{4} = -361$$
$$t^2 = -4 \cdot (-361)$$
$$t^2 = 1444$$
$$t = \sqrt{1444}$$
$$t = 38$$

Como o tempo não pode ser negativo, consideramos $t = 38$. Portanto, o tempo mínimo de espera é de 38 minutos.
Resposta correta: D

Capítulo 4

1) Podemos desenhar um diagrama no qual os planetas são representadas por pontos e as rotas que os ligam por segmentos de reta que não se intersectam (veja a figura). Agora é claro que é impossível viajar da Terra para Marte.





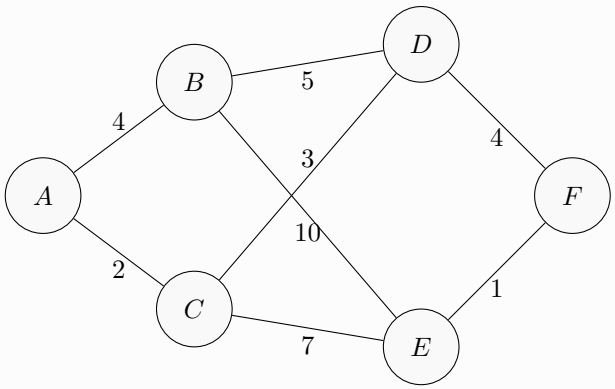
2) Suponhamos que isto é possível. Considere o grafo no qual os vértices representam os telefones e as arestas representam os fios. Este grafo tem 15 vértices e cada um deles tem 5 arestas. Vamos contar o número de arestas neste grafo. Para isto, podemos somar todos os vértices. No entanto, nesta soma, cada aresta é contada duas vezes (cada aresta liga dois vértices). Portanto, o número de arestas no grafo tem que ser igual a $\frac{15 \cdot 5}{2}$. Mas esse número não é inteiro. Segue que tal grafo não pode existir, o que significa que não podemos conectar os telefones como enunciado no problema.

3) Considere o grafo no qual os vértices representam as cidades e as arestas representam as estradas. Este grafo tem 100 vértice e cada um deles tem 4 arestas. Vamos contar o número de arestas neste grafo. Para isto, podemos somar todos os vértices. No entanto, nesta soma, cada aresta é contada duas vezes (cada aresta liga dois vértices). Portanto o número de arestas no grafo tem que ser igual a $\frac{100 \cdot 4}{2} = 200$. Segue que tal grafo possui 200 arestas.
Portanto, existem ao todo 200 estradas neste reinado.

4) Vamos analisar os possíveis caminhos do ponto A até o ponto F.
Caminho $ABDF$: $4 + 5 + 3 = 12$
Caminho $ABEF$: $4 + 10 + 4 = 18$
Caminho $ACDF$: $2 + 8 + 3 = 13$
Caminho $ACEF$: $2 + 6 + 4 = 12$
Caminho $ACBDF$: $2 + 1 + 5 + 3 = 11$
Caminho $ACBEF$: $2 + 1 + 10 + 4 = 17$
Comparando os tempos, o menor deles é: 11 minutos.
Portanto, o estudante deve seguir o caminho mínimo $ACBDF$, gastando o tempo mínimo de 11 minutos.

Capítulo 5

1) **(a)** Este é o gráfo que representa o problema



(b) Queremos encontrar o menor custo total entre o nó A e o nó F, para isso, vamos utilizar a função recursiva

$$z(j) = \begin{cases} 0, & j \text{ é o primeiro nó} \\ \min\limits_{(i,j)\in\mathcal{K}}\{c(i,j)\}, & j \text{ demais nós} \end{cases}$$

Onde $c(i,j) = z(i) + d(i,j)$
queremos calcular $z(F)$. Para isso precisamos calcular a distância do nó inicial A até cada nó do grafo, isto é, queremos calcular $z(j)$ para $j = A, B, C, \ldots, F$.
Condição inicial

$$z(A) = 0$$

Estágio 1

$$\begin{aligned} z(B) &= \min\{c(A,B)\} \\ &= \min\{z(A) + d(A,B)\} \\ &= \min\{0+4\} \\ &= 4 \quad \text{(passando por A)} \\ z(C) &= \min\{c(A,C)\} \\ &= \min\{z(A) + d(A,C)\} \\ &= \min\{0+2\} \\ &= 2 \quad \text{(passando por A)} \end{aligned}$$

Estágio 2

$$\begin{aligned} c(B,D) &= z(B) + d(B,D) = 4+5 = 9 \\ c(C,D) &= z(C) + d(C,D) = 2+3 = 5 \\ c(B,E) &= z(B) + d(B,E) = 4+10 = 14 \\ c(C,E) &= z(C) + d(C,E) = 2+7 = 9 \\ z(D) &= \min\{\ c(B,D);\ c(C,D);\ \} \\ &= 5 \text{ (passando por } C) \\ z(E) &= \min\{\ c(B,E);\ c(C,E);\ \} \\ &= 9 \text{ (passando por } C). \end{aligned}$$

Estágio 3

$$\begin{aligned} c(D,F) &= z(D) + d(D,F) = 5+4 = 9 \\ c(E,F) &= z(E) + d(E,F) = 9+1 = 10 \\ z(F) &= \min\{\ c(D,F);\ c(E,F);\ \} \\ &= 9 \text{ (passando por } D) \end{aligned}$$

Resumo do estágio 1:

$$\begin{aligned} z(B) &= 4 \text{ (passando por A)} \\ z(C) &= 2 \text{ (passando por A)} \end{aligned}$$

Resumo do estágio 2:

$$\begin{aligned} z(D) &= 5 \text{ (passando por C)} \\ z(E) &= 9 \text{ (passando por C)} \end{aligned}$$

Resumo do estágio 3:

$$z(D) = 9 \text{ (passando por D)}$$

Portanto, o menor custo total é $R\$9{,}00$
(c) O caminho que deve ser escolhido é

$$ACDF$$

2) Queremos encontrar o maior lucro total entre o nó A e o nó F, para isso, vamos utilizar a função recursiva

$$z(j) = \begin{cases} 0, & j \text{ é o primeiro nó} \\ \max\limits_{(i,j)\in\mathcal{K}}\{c(i,j)\}, & j \text{ demais nós} \end{cases}$$

onde $c(i,j) = z(i) + d(i,j)$
Queremos calcular $z(F)$. Para isso precisamos calcular o lucro acumulado do nó inicial A até cada nó do grafo, isto é, queremos calcular $z(j)$ para $j = A, B, C, \ldots, F$.
Condição inicial

$$z(A) = 0$$

Estágio 1

$$\begin{aligned} z(B) &= \max\{c(A,B)\} \\ &= \max\{z(A) + d(A,B)\} \\ &= \max\{0+8\} \\ &= 8 \quad \text{(passando por A)} \\ z(C) &= \max\{c(A,C)\} \\ &= \max\{z(A) + d(A,C)\} \\ &= \max\{0+6\} \\ &= 6 \quad \text{(passando por A)} \end{aligned}$$

Estágio 2

$$\begin{aligned} c(B,D) &= z(B) + d(B,D) = 8+7 = 15 \\ c(C,D) &= z(C) + d(C,D) = 6+5 = 11 \\ c(B,E) &= z(B) + d(B,E) = 8+4 = 12 \\ c(C,E) &= z(C) + d(C,E) = 6+9 = 15 \\ z(D) &= \max\{\ c(B,D);\ c(C,D);\ \} \\ &= 15 \text{ (passando por } B). \\ z(E) &= \max\{\ c(B,E);\ c(C,E);\ \} \\ &= 15 \text{ (passando por } C). \end{aligned}$$

Estágio 3

$$c(D,F) = z(D) + d(D,F) = 15 + 6 = 21$$
$$c(E,F) = z(E) + d(E,F) = 15 + 8 = 23$$
$$z(F) = \max\{\ c(D,F);\ c(E,F);\ \}$$
$$= 23 \text{ (passando por } E).$$

Resumo do estágio 1:

$z(B) = 8$ (passando por A)
$z(C) = 6$ (passando por A)

Resumo do estágio 2:

$z(D) = 15$ (passando por B)
$z(E) = 15$ (passando por C)

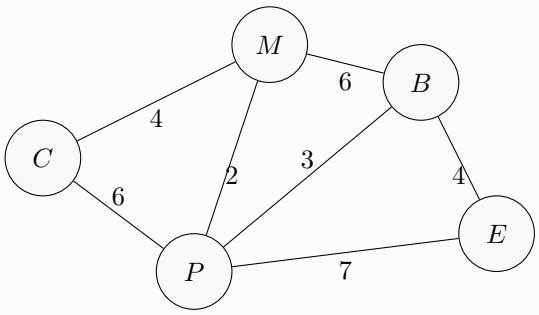
Resumo do estágio 3:

$z(F) = 23$ (passando por E)

Portanto, o maior lucro total é R\$23,00 e o caminho que gera o maior lucro é:

$ACEF$

3) **(a) Resolução**



(b) Queremos encontrar o caminho mais rápido entre o nó C e o nó E, para isso, vamos utilizar a função recursiva

$$z(j) = \begin{cases} 0, & j \text{ é o primeiro nó} \\ \min\limits_{(i,j)\in\mathcal{K}}\{c(i,j)\}, & j \text{ demais nós} \end{cases}$$

pnde $c(i,j) = z(i) + d(i,j)$
Queremos calcular $z(E)$. Para isso precisamos calcular a distância do nó inicial C até cada nó do grafo, isto é, queremos calcular $z(j)$ para $j = C, P, M, \ldots, B, E$.
Condição inicial

$z(C) = 0$

Estágio 1

$$z(M) = \min\{c(C,M)\}$$
$$= \min\{z(C) + d(C,M)\}$$
$$= \min\{0 + 4\}$$
$$= 4 \quad \text{(passando por C)}$$

Estágio 2

$$c(C,P) = z(C) + d(C,P) = 0 + 6 = 6$$
$$c(M,P) = z(M) + d(M,P) = 4 + 2 = 6$$
$$z(P) = \min\{\ c(C,P);\ c(M,P);\ \}$$
$$= 6 \text{ (passando por } C \text{ ou passando por } M)$$

Estágio 3

$$c(P,B) = z(P) + d(P,B) = 6 + 3 = 9$$
$$c(M,B) = z(M) + d(M,B) = 4 + 6 = 10$$
$$z(B) = \min\{\ c(P,B);\ c(M,B);\ \}$$
$$= 9 \text{ (passando por } P).$$

Estágio 4

$$c(P,E) = z(P) + d(P,E) = 6 + 7 = 13$$
$$c(B,E) = z(B) + d(B,E) = 9 + 4 = 13$$
$$z(E) = \min\{\ c(P,E);\ c(B,E);\ \}$$
$$= 13 \text{ (passando por } P \text{ ou passando por } B)$$

Resumo do estágio 1:

$z(M) = 4$ (passando por A)

Resumo do estágio 2:

$z(P) = 6$ (passando por C ou M)

Resumo do estágio 3:

$z(B) = 9$ (passando por P)

Resumo do estágio 4:

$z(E) = 13$ (passando por P ou B)

Portanto, o menor tempo acumulado é $13min$.
(c) Temos três caminho que podem ser escolhido, são eles: $CMPE$, $CMPBE$, CPE

Capítulo 6

1) Condições iniciais:

$$z(i,0) = 0$$
$$z(0,j) = 0$$

Primeiro estágio

$$\begin{aligned} z(1,1) &= z(0,1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 1, pois $p_1 > 1$

$$\begin{aligned} z(1,2) &= \max\{z(0,2), 12 + z(0,0)\} \\ &= \max\{0, 12\} \\ &= 12 \end{aligned}$$

Decisão: Levar o item 1

$$z(1, j \geq 2) = 12$$

Decisão: Levar o item 1

Segundo estágio

$$\begin{aligned} z(2,1) &= z(1,1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 2, pois $p_2 > 1$

$$\begin{aligned} z(2,2) &= z(1,2) \\ &= 12 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 2, pois $p_2 > 2$

$$\begin{aligned} z(2,3) &= \max\{z(1,3), 18 + z(1,0)\} \\ &= \max\{12, 18 + 0\} \\ &= 18 \end{aligned}$$

Decisão: Levar o item 2

$$\begin{aligned} z(2,4) &= \max\{z(1,4), 18 + z(1,1)\} \\ &= \max\{12, 18 + 0\} \\ &= 18 \end{aligned}$$

Decisão: Levar o item 2

$$\begin{aligned} z(2, j \geq 5) &= \max\{z(1,5), 18 + z(1,2)\} \\ &= \max\{12, 18 + 12\} \\ &= 30 \end{aligned}$$

Decisão: Levar o item 2

Terceiro estágio

$$\begin{aligned} z(3,1) &= z(2,1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 3, pois $p_3 > 1$

$$\begin{aligned} z(3,2) &= z(2,2) \\ &= 12 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 2, pois $p_3 > 2$

$$\begin{aligned} z(3,3) &= z(2,3) \\ &= 18 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 3, pois $p_3 > 3$

$$\begin{aligned} z(3,4) &= \max\{z(2,4), 20 + z(2,0)\} \\ &= \max\{18, 20 + 0\} \\ &= 20 \end{aligned}$$

Decisão: Levar o item 3

$$\begin{aligned} z(3,5) &= \max\{z(2,5), 20 + z(2,1)\} \\ &= \max\{30, 20 + 0\} \\ &= 30 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 3

$$\begin{aligned} z(3,6) &= \max\{z(2,6), 20 + z(2,2)\} \\ &= \max\{30, 20 + 12\} \\ &= 32 \end{aligned}$$

Decisão: Levar o item 3

$$\begin{aligned} z(3,7) &= \max\{z(2,7), 20 + z(2,3)\} \\ &= \max\{30, 20 + 18\} \\ &= 38 \end{aligned}$$

Decisão: Levar o item 3

$$\begin{aligned} z(3,8) &= \max\{z(2,8), 20 + z(2,4)\} \\ &= \max\{30, 20 + 18\} \\ &= 38 \end{aligned}$$

Decisão: Levar o item 3

$$\begin{aligned} z(3,9) &= \max\{z(2,9), 20 + z(2,5)\} \\ &= \max\{30, 20 + 30\} \\ &= 50 \end{aligned}$$

Decisão: Levar o item 3

Quarto estágio

$$\begin{aligned} z(4,9) &= \max\{z(3,9), 24 + z(3,4)\} \\ &= \max\{50, 24 + 20\} \\ &= 50 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 4

Recuperando a solução ótima

As cargas que devem ser embarcadas são 1, 2 e 3, obtendo valor máximo de R\$50 mil, sem ultrapassar a capacidade do navio.

2) Queremos maximizar o lucro total, sem ultrapassar o peso limite.

Itens	Peso total	Valor total
1 + 2	50	(excede)
1 + 3	30	45
2 + 3	40	61
1 + 2 + 3	60	(excede)

Depois de analisarmos todas as opções, concluímos que a melhor escolha é levar os objetos 2 e 3, com valor total de 61 e peso total 40. Esse é o máximo valor possível dentro das restrições.

3) **Resolução:** *a*

Seja $z(i,j)$ a utilidade máxima obtida ao considerar os i primeiros objetos e uma capacidade de carga igual a j kg. A relação de recorrência da programação dinâmica para o problema da mochila sem repetição é dada por

$$z(i,j) = \begin{cases} 0, & \text{se } i = 0 \text{ ou } j = 0 \\ z(i-1,j), & \text{se } p_i > j, \\ \max\{z(i-1,j), & \\ \quad v_i + z(i-1, j-p_i)\}, & \\ \quad \text{caso contrário} & \end{cases}$$

em que p_i representa o peso do objeto i e v_i representa sua utilidade ou valor associado.
Neste problema, temos:

$$(p_1, v_1) = (1, 6),$$
$$(p_2, v_2) = (2, 10),$$
$$(p_3, v_3) = (3, 12),$$
$$(p_4, v_4) = (4, 18),$$
$$(p_5, v_5) = (5, 22).$$

Resolução *b*

Condições iniciais:

$$z(i, 0) = 0,$$
$$z(0, j) = 0.$$

Primeiro estágio

$$\begin{aligned} z(1,1) &= \max\{z(0,1), 6 + z(0,0)\} \\ &= \max\{0, 6\} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Decisão: Levar o item 1.

$$\begin{aligned} z(1, j \geq 2) &= \max\{z(0,2), 6 + z(0,1)\} \\ &= \max\{0, 6\} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Decisão: Levar o item 1

Segundo estágio

$$\begin{aligned} z(2,1) &= z(1,1) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 2

$$\begin{aligned} z(2,2) &= \max\{z(1,2), 10 + z(1,0)\} \\ &= \max\{6, 10\} \\ &= 10 \end{aligned}$$

Decisão: Levar o item 2

$$\begin{aligned} z(2, j \geq 3) &= \max\{z(1,3), 10 + z(1,1)\} \\ &= \max\{6, 16\} \\ &= 16 \end{aligned}$$

Decisão: Levar o item 2

Terceiro estágio

$$\begin{aligned} z(3,1) &= z(2,1) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Decisão: Não Levar o item 3, pois $p_3 > 1$

$$\begin{aligned} z(3,2) &= z(2,2) \\ &= 10 \end{aligned}$$

Decisão: Não usar o item 3

$$\begin{aligned} z(3,3) &= \max\{z(2,3), 12 + z(2,0)\} \\ &= \max\{16, 12\} \\ &= 16 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 3

$$\begin{aligned} z(3,4) &= \max\{z(2,4), 12 + z(2,1)\} \\ &= \max\{16, 18\} \\ &= 18 \end{aligned}$$

Decisão: Levar o item 3

$$\begin{aligned} z(3,5) &= \max\{z(2,5), 12 + z(2,2)\} \\ &= \max\{16, 22\} \\ &= 22 \end{aligned}$$

Decisão: Levar o item 3

$$\begin{aligned} z(3,6) &= \max\{z(2,6), 12 + z(2,3)\} \\ &= \max\{16, 28\} \\ &= 28 \end{aligned}$$

Decisão: Levar o item 3

Quarto estágio

$$\begin{aligned} z(4,1) &= z(3,1) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Decisão: Não Levar o item 4, pois $p_4 > 1$

$$\begin{aligned} z(4,2) &= z(3,2) \\ &= 10 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 4

$$\begin{aligned} z(4,3) &= z(3,3) \\ &= 16 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 4

$$\begin{aligned} z(4,4) &= \max\{z(3,4); 18 + z(3,0)\} \\ &= \max\{18; 18\} \\ &= 18 \end{aligned}$$

Decisão: Levar ou não levar o item 4

$$\begin{aligned} z(4,5) &= \max\{z(3,5); 18 + z(3,1)\} \\ &= \max\{22; 24\} \\ &= 24 \end{aligned}$$

Decisão: Levar o item 4

$$\begin{aligned} z(4,6) &= \max\{z(3,6); 18 + z(3,2)\} \\ &= \max\{28; 28\} \\ &= 28 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar ou levar o item 4
Quinto estágio

$$\begin{aligned} z(5,6) &= \max\{z(4,6), 22 + z(4,1)\} \\ &= \max\{28, 28\} \\ &= 28 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar ou levar o item 5
Assim, o valor ótimo é

$$z(5,6) = 28.$$

Resolução *c*
Para identificar quais objetos compõem a solução ótima, fazemos o retrocesso na tabela.
Como

$$z(5,6) = z(4,6) = 28,$$

concluímos que o objeto 5 não foi selecionado.

Em seguida, observamos que

$$z(4,6) = z(3,6) = 28,$$

portanto, o objeto 4 também não foi incluído.
Agora, como

$$z(3,6) \neq z(2,6),$$

isto é,

$$28 \neq 16,$$

segue que o objeto 3 foi incluído. Restam, então, $6 - 3 = 3$ kg de capacidade.
Analisando a posição correspondente, vemos que

$$z(2,3) \neq z(1,3),$$

pois

$$16 \neq 6.$$

Logo, o objeto 2 foi incluído. Restam agora $3 - 2 = 1$ kg.
Por fim, temos

$$z(1,1) \neq z(0,1),$$

uma vez que

$$6 \neq 0.$$

Assim, o objeto 1 também foi incluído.
Portanto, a solução ótima é composta pelos objetos $1, 2 e 3$.

Capítulo 7

1) Condições iniciais:

$$z(i,0) = 0,$$
$$z(0,j) = 0.$$

Primeiro estágio

$$z(1,1) = z(0,1) = 0$$

Decisão: Não levar o item 1, pois $p_1 > 1$.

$$\begin{aligned} z(1,2) &= \max\{z(0,2), 31 + z(0,0)\} \\ &= \max\{0, 31\} \\ &= 31 \end{aligned}$$

Decisão: Levar 1 unidade do item 1

$$\begin{aligned} z(1,3) &= \max\{z(0,3), 31 + z(0,1)\} \\ &= \max\{0, 31\} \\ &= 31 \end{aligned}$$

Decisão: Levar 1 unidade do item 1

$$\begin{aligned} z(1,4) &= \max\{z(0,4), 31 + z(0,2), 2 \cdot 31 + z(0,0)\} \\ &= \max\{0, 31, 62\} \\ &= 62 \end{aligned}$$

Decisão: Levar 2 unidades do item 1
Segundo estágio

$$\begin{aligned} z(2,1) &= z(1,1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 2

$$\begin{aligned} z(2,2) &= z(1,2) \\ &= 31 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 2

$$\begin{aligned} z(2,3) &= \max\{z(1,3), 47 + z(1,0)\} \\ &= \max\{31, 47\} \end{aligned}$$

$$= 47$$

Decisão: Levar 1 unidades do item 2

$$\begin{aligned} z(2,4) &= \max\{z(1,4), 47 + z(1,1)\} \\ &= \max\{62, 47\} \\ &= 62 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 2

Terceiro estágio

$$\begin{aligned} z(3,4) &= \max\{z(2,4), 14 + z(2,3), 2 \cdot 14 + z(2,2), \\ &\qquad 3 \cdot 14 + z(2,1), 4 \cdot 14 + z(2,0)\} \\ &= \max\{62, 14 + 47, 28 + 31, 42 + 0, 56 + 0\} \\ &= \max\{62, 61, 59, 42, 56\} \\ &= 62 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 3

Recuperando a solução ótima

O navio deve ser carregado com duas unidades do item 1, obtendo receita máxima de 62 milhares de dólares.

2) Condições iniciais

$$\begin{aligned} z(i,0) &= 0, \\ z(0,j) &= 0. \end{aligned}$$

Primeiro estágio

$$\begin{aligned} z(1,1) &= \max\{z(0,1), 12 + z(0,0)\} \\ &= \max\{0, 12\} \\ &= 12 \end{aligned}$$

Decisão: Levar 1 unidade do item 1

$$\begin{aligned} z(1,2) &= \max\{z(0,2), 12 + z(0,1), 2 \cdot 12 + z(0,0)\} \\ &= \max\{0, 12, 24\} \\ &= 24 \end{aligned}$$

Decisão: Levar 2 unidade do item 1

$$\begin{aligned} z(1,3) &= \max\{z(0,3), 12 + z(0,2), 2 \cdot 12 + z(0,1), \\ &\qquad 3 \cdot 12 + z(0,0)\} \\ &= \max\{0, 12, 24, 36\} \\ &= 36 \end{aligned}$$

Decisão: Levar 3 unidade do item 1

$$\begin{aligned} z(1,4) &= \max\{z(0,4), 12 + z(0,3), 2 \cdot 12 + z(0,2), \\ &\qquad 3 \cdot 12 + z(0,1), 4 \cdot 12 + z(0,0)\} \\ &= \max\{0, 12, 24, 36, 48\} \\ &= 48 \end{aligned}$$

Decisão: Levar 4 unidades do item 1

$$\begin{aligned} z(1,5) &= \max\{z(0,5), 12 + z(0,4), 2 \cdot 12 + z(0,3), \\ &\qquad 3 \cdot 12 + z(0,2), 4 \cdot 12 + z(0,1) \\ &\qquad 5 \cdot 12 + z(0,0)\} \\ &= \max\{0, 12, 24, 36, 48, 60\} \\ &= 60 \end{aligned}$$

Decisão: Levar 5 unidades do item 1

Segundo estágio

$$\begin{aligned} z(2,1) &= z(1,1) \\ &= 12 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 2, pois $p_1 > 1$.

$$\begin{aligned} z(2,2) &= \max\{z(1,2), 20 + z(1,0)\} \\ &= \max\{24, 20\} \\ &= 24 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 2.

$$\begin{aligned} z(2,3) &= \max\{z(1,3), 20 + z(1,1)\} \\ &= \max\{36, 32\} \\ &= 36 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 2.

$$\begin{aligned} z(2,4) &= \max\{z(1,4), 20 + z(1,2), 2 \cdot 20 + z(1,0)\} \\ &= \max\{48, 44, 40\} \\ &= 48 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 2.

$$\begin{aligned} z(2,5) &= \max\{z(1,5), 20 + z(1,3), 2 \cdot 20 + z(1,1)\} \\ &= \max\{60, 56, 52\} \\ &= 60 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 2.

Terceiro estágio

$$\begin{aligned} z(3,1) &= z(2,1) \\ &= 12 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 3, pois $p_1 > 1$.

$$\begin{aligned} z(3,2) &= z(2,2) \\ &= 24 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 3, pois $p_1 > 1$.

$$\begin{aligned} z(3,3) &= \max\{z(2,3), 33 + z(2,0)\} \\ &= \max\{36, 33\} \\ &= 33 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 3.

$$\begin{aligned} z(3,4) &= \max\{z(2,4), 33 + z(2,1)\} \\ &= \max\{48, 45\} \\ &= 48 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 3.

$$z(3,5) = \max\{z(2,5), 33 + z(2,2)\}$$

$$= \max\{60, 57\}$$
$$= 60$$

Decisão: Não levar o item 3.

Quarto estágio

$$z(4,5) = \max\{z(3,5), 40 + z(3,1)\}$$
$$= \max\{60, 40 + 12\}$$
$$= \max\{60, 52\}$$
$$= 60$$

Decisão: Não levar o item 4.

Recuperando a solução ótima

O produtor deve transportar 5 cargas de fertilizante. Peso:$5 \cdot 1 = 5$ toneladas Valor: $5 \cdot 12 = 60$ mil reais.

3) Condições iniciais

$$z(i,0) = 0$$
$$z(0,j) = 0$$

Primeiro estágio $(i = 1)$

$$z(1,1) = z(0,1)$$
$$= 0$$

Decisão: Não levar o item 1, pois $p_1 > 1$.

$$z(1,2) = z(0,2)$$
$$= 0$$

Decisão: Não levar o item 1, pois $p_1 > 2$.

$$z(1,3) = \max\{z(0,3);\ 3{,}1 + z(0,0)\}$$
$$= \max\{0;\ 3{,}1 + 0\}$$
$$= 3{,}1$$

Decisão: Levar 1 unidade do item 1.

$$z(1,4) = \max\{z(0{,}4), 3{,}1 + z(0;0)\}$$
$$= \max\{0;\ 3{,}1 + 0\}$$
$$= 3{,}1$$

Decisão: Levar 1 unidade do item 1.

$$z(1,5) = \max\{z(0,5);\ 3{,}1 + z(0,2)\}$$
$$= \max\{0; 3{,}1\}$$
$$= 3{,}1$$

Decisão: Levar 1 unidade do item 1.

$$z(1,6) = \max\{z(0,6);\ 3{,}1 + z(0,3);\ 2 \cdot 3{,}1 + z(0,0)\}$$
$$= \max\{0;\ 3{,}1;\ 6{,}2\}$$
$$= 6{,}2$$

Decisão: Levar 2 unidade do item 1.

$$z(1,7) = \max\{0,7);\ 3{,}1 + z(0,4);\ 2 \cdot 3{,}1 + z(0,1)\}$$
$$= \max\{0;\ 3{,}1;\ 6{,}2\}$$
$$= 6{,}2$$

Decisão: Levar 2 unidade do item 1.

Segundo estágio $(i = 2)$

$$z(2,1) = z(1{,}1)$$
$$= 0$$

Decisão: Não levar o item 2, pois $p_2 > 1$.

$$z(2,2) = \max\{z(1,2); 2{,}6 + z(1,0)\}$$
$$= \max\{0;\ 2{,}6\}$$
$$= 2{,}6$$

Decisão: Levar 1 unidade do item 2.

$$z(2,3) = \max\{z(1,3); 2{,}6 + z(1,1)\}$$
$$= \max\{3{,}1;\ 2{,}6\}$$
$$= 3{,}1$$

Decisão: Não levar o item 2.

$$z(2,4) = \max\{z(1,4); 2{,}6 + z(1,2); 2 \cdot 2{,}6 + z(1,0)\}$$
$$= \max\{3{,}1;\ 2{,}6;\ 5{,}2\}$$
$$= 5{,}2$$

Decisão: Levar 2 unidade do item 2.

$$z(2,5) = \max\{z(1,5); 2{,}6 + z(1,3); 2 \cdot 2{,}6 + z(1,1)\}$$
$$= \max\{3{,}1;\ 5{,}7;\ 5{,}2\}$$
$$= 5{,}7$$

Decisão: Levar 1 unidade do item 2.

$$z(2,6) = \max\{z(1,6); 2{,}6 + z(1,4); 2 \cdot 2{,}6 + z(1,2);$$
$$3 \cdot 2.6 + z(1,0)\}$$
$$= \max\{6{,}2;\ 5{,}7;\ 5{,}2;\ 7{,}8\}$$
$$= 7{,}8$$

Decisão: Levar 3 unidade do item 2.

$$z(2,7) = \max\{z(1,7); 2{,}6 + z(1,5); 2 \cdot 2{,}6 + z(1,3);$$
$$3 \cdot 2{,}6 + z(1,1)\}$$
$$= \max\{6{,}2;\ 5{,}7;\ 8{,}3;\ 7{,}8\}$$
$$= 8{,}3$$

Decisão: Levar 2 unidade do item 2.

Terceiro estágio $(i = 3)$

$$z(3,1) = z(2,1)$$
$$= 0$$

Decisão: Não levar o item 3, pois $p_3 > 1$.

$$z(3,2) = z(2,2)$$
$$= 2{,}6$$

Decisão: Não levar o item 3, pois $p_3 > 2$.

$$\begin{aligned} z(3,3) &= z(2,3) \\ &= 3{,}1 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 3, pois $p_3 > 3$.

$$\begin{aligned} z(3,4) &= \max\{z(2,4); 3{,}5 + z(2,0)\} \\ &= \max\{5{,}2;\ 3{,}5\} \\ &= 5{,}2 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 3.

$$\begin{aligned} z(3,5) &= \max\{z(2,5); 3{,}5 + z(2,1)\} \\ &= \max\{5{,}7;\ 3{,}5\} \\ &= 5{,}7 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 3.

$$\begin{aligned} z(3,6) &= \max\{z(2,6); 3{,}5 + z(2,2)\} \\ &= \max\{7{,}8;\ 6{,}1\} \\ &= 7{,}8 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 3.

$$\begin{aligned} z(3,7) &= \max\{z(2,7); 3{,}5 + z(2,3)\} \\ &= \max\{8{,}3;\ 6{,}6\} \\ &= 8{,}3 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 3.
Quarto estágio ($i = 4$)

$$\begin{aligned} z(4,1) &= z(3,1) \\ &= o \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 4, pois $p_4 > 1$.

$$\begin{aligned} z(4,2) &= z(3,2) \\ &= 2{,}6 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 4, pois $p_4 > 2$.

$$\begin{aligned} z(4,3) &= \max\{z(3,3); 2{,}8 + z(3,0)\} \\ &= \max\{3{,}1;\ 2{,}8\} \\ &= 3{,}1 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 4.

$$\begin{aligned} z(4,4) &= \max\{z(3,4); 2{,}8 + z(3,1)\} \\ &= \max\{5{,}2;\ 2{,}8\} \\ &= 5{,}2 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 4.

$$\begin{aligned} z(4,5) &= \max\{z(3,5); 2{,}8 + z(3,2)\} \\ &= \max\{5{,}7;\ 5{,}4\} \\ &= 5{,}7 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 4.

$$\begin{aligned} z(4,6) &= \max\{z(3,6); 2{,}8 + z(3,3); 2 \cdot 2{,}8 + z(3,0)\} \\ &= \max\{7{,}8;\ 5{,}9;\ 5{,}6\} \\ &= 7{,}8 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 4.

$$\begin{aligned} z(4,7) &= \max\{z(3,7); 2{,}8 + z(3,4); 2 \cdot 2{,}8 + z(3,1)\} \\ &= \max\{8{,}3;\ 8;\ 5{,}6\} \\ &= 8{,}3 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 4.
Quinto estágio ($i = 5$)

$$\begin{aligned} z(5{,}7) &= \max\{z(4,7); 2{,}4 + z(4,5); 2 \cdot 2{,}4 + z(4,3); \\ &\qquad 3 \cdot 2{,}4 + z(4,1)\} \\ &= \max\{8{,}3;\ 8{,}1;\ 7{,}9;\ 7{,}2\} \\ &= 8{,}3 \end{aligned}$$

Decisão: Não levar o item 5.
Resultado final
O deputado deve contratar 1 lote do tipo 1 e 2 lotes do tipo 2, obtendo um alcance máximo de 8,3 mil eleitores, com custo total de 7 mil dólares.

Capítulo 8

1) Condição inicial

$$\begin{aligned} z(4,1) &= 150 \\ z(4,2) &= 135 \\ z(4,3) &= 120 \end{aligned}$$

Terceiro estágio

$$\begin{aligned} m(3,0) &= r(0) - c(0) + z(4,1) \\ &= 1500 - 120 + 150 \\ &= 1530 \\ z(3,0) &= \max\{m(3,0)\} \\ &= \max\{1530\} = 1530 \end{aligned}$$

Decisão: Manter

$$\begin{aligned} m(3,1) &= r(1) - c(1) + z(4,2) \\ &= 1500 - 140 + 135 \end{aligned}$$

$$= 1495$$
$$s(3,1) = r(0) - c(0) + s(1) - c + z(4,1)$$
$$= 1500 - 120 + 150 - 200 + 150$$
$$= 1480$$
$$z(3,1) = \max\{m(3,1); s(3,1)\}$$
$$= \max\{1495; 1480\} = 1495$$

Decisão: Manter

$$m(3,2) = r(2) - c(2) + z(4,3)$$
$$= 1500 - 170 + 120$$
$$= 1450$$
$$s(3,2) = r(0) - c(0) + s(2) - c + z(4,1)$$
$$= 1500 - 120 + 135 - 200 + 150$$
$$= 1465$$
$$z(3,2) = \max\{m(3,2); s(3,2)\}$$
$$= \max\{1450; 1465\}$$
$$= 1465$$

Decisão: Substituir

Segundo estágio

$$m(2,0) = r(0) - c(0) + z(3,1)$$
$$= 1500 - 120 + 1495$$
$$= 2875$$
$$z(2,0) = \max\{m(2,0)\}$$
$$= \max\{2875\} = 2875$$

Decisão: Manter

$$m(2,1) = r(1) - c(1) + z(3,2)$$
$$= 1500 - 140 + 1465$$
$$= 2825$$
$$s(2,1) = r(0) - c(0) + s(1) - c + z(3,1)$$
$$= 1500 - 120 + 150 - 200 + 1495$$
$$= 2825$$
$$z(2,1) = \max\{m(2,1); s(2,1)\}$$
$$= \max\{2825; 2825\} = 2825$$

Decisão: Manter ou Substituir

Primeiro estágio

$$m(1,0) = r(0) - c(0) + z(2,1)$$
$$= 1500 - 120 + 2825$$
$$= 4205$$
$$z(1,0) = \max\{m(1,0)\}$$
$$= \max\{4205\}$$
$$= 4205$$

Decisão: Manter

Recuperação da solução ótima

Como no primeiro ano a máquina está nova, a decisão inicial é manter.

$$z(1,0) = 4205$$

Decisão: Manter

No segundo estágio, quando a máquina terá idade 1, houve empate.

$$z(2,1) = 2825$$

Decisão: Manter ou Substituir

Assim, temos duas soluções ótimas:

Solução 1

Ano 1: Manter
Ano 2: Manter
Ano 3: Substituir

Solução 2

Ano 1: Manter
Ano 2: Substituir
Ano 3: Manter

Ambas com o mesmo retorno total de $R\$$ 4205,00.

Portanto, a decisão do meu filho é justificável, mas não é única, pois há empate com outra solução ótima.

2) Condições iniciais

$$z(5;\ 1) = 80$$
$$z(5;\ 2) = 60$$
$$z(5;\ 3) = 50$$
$$z(5;\ 4) = 30$$

Quarto estágio

$$m(4;\ 1) = r(1) - c(1) + z(5;\ 2)$$
$$= 19 - 0{,}6 + 60$$
$$= 78{,}4$$
$$s(4;\ 1) = r(0) - c(0) + s(1) - c + z(5;\ 1)$$
$$= 20 - 0{,}2 + 80 - 100 + 80$$
$$= 79{,}8$$
$$z(4;\ 1) = \max\{m(4;\ 1);\ s(4;\ 1)\}$$
$$= \max\{78{,}4;\ 79{,}8\} = 79{,}8$$

Decisão: Substituir

$$m(4;\ 2) = r(2) - c(2) + z(5;\ 3)$$
$$= 18{,}5 - 1{,}2 + 50$$
$$= 67{,}3$$
$$s(4;\ 2) = r(0) - c(0) + s(2) - c + z(5;\ 1)$$
$$= 20 - 0{,}2 + 60 - 100 + 80$$
$$= 59{,}8$$
$$z(4;\ 2) = \max\{m(4;\ 2);\ s(4;\ 2)\}$$
$$= \max\{67{,}3;\ 59{,}8\} = 67{,}3$$

Decisão: Manter

$$m(4;\ 3) = r(3) - c(3) + z(5;\ 4)$$
$$= 17{,}2 - 1{,}5 + 30$$
$$= 45{,}7$$
$$s(4;\ 3) = r(0) - c(0) + s(3) - c + z(5;\ 1)$$
$$= 20 - 0{,}2 + 50 - 100 + 80$$

$$= 49{,}8$$
$$z(4;\ 3) = \max\{m(4;\ 3);\ s(4;\ 3)\}$$
$$= \max\{45{,}7;\ 49{,}8\} = 49{,}8$$

Decisão: Substituir

$$s(4;\ 6) = r(0) - c(0) + s(6) - c + z(5;\ 1)$$
$$= 20 - 0{,}2 + 5 - 100 + 80$$
$$= 4{,}8$$
$$z(4;\ 6) = \max\{s(4;\ 6)\}$$
$$= \max\{4{,}8\} = 4{,}8$$

Decisão: Substituir.

Terceiro estágio

$$m(3;\ 1) = r(1) - c(1) + z(4;\ 2)$$
$$= 19 - 0{,}6 + 67{,}3$$
$$= 85{,}7$$
$$s(3;\ 1) = r(0) - c(0) + s(1) - c + z(4;\ 1)$$
$$= 20 - 0{,}2 + 80 - 100 + 79{,}8$$
$$= 79{,}6$$
$$z(3;\ 1) = \max\{m(3;\ 1);\ s(3;\ 1)\}$$
$$= \max\{85{,}7;\ 79{,}6\} = 85{,}7$$

Decisão: Manter

$$m(3;\ 2) = r(2) - c(2) + z(4;\ 3)$$
$$= 18{,}5 - 1{,}2 + 49{,}8$$
$$= 67{,}1$$
$$s(3;\ 2) = r(0) - c(0) + s(2) - c + z(4;\ 1)$$
$$= 20 - 0{,}2 + 60 - 100 + 79{,}8$$
$$= 59{,}6$$
$$z(3;\ 2) = \max\{m(3;\ 2);\ s(3;\ 2)\}$$
$$= \max\{67{,}1;\ 59{,}6\}$$
$$= 67{,}1$$

Decisão: Manter

$$m(3;\ 5) = r(5) - c(5) + z(4;\ 6)$$
$$= 14 - 1{,}8 + 4{,}8$$
$$= 17$$
$$s(3;\ 5) = r(0) - c(0) + s(5) - c + z(4;\ 1)$$
$$= 20 - 0{,}2 + 10 - 100 + 79{,}8$$
$$= 9{,}6$$
$$z(3;\ 5) = \max\{m(3;\ 5);\ s(3;\ 5)\}$$
$$= \max\{17;\ 9{,}6\} = 17$$

Decisão: Manter

Segundo estágio

$$m(2;\ 1) = r(1) - c(1) + z(3;\ 2)$$
$$= 19 - 0{,}6 + 67{,}1$$
$$= 85{,}5$$
$$s(2;\ 1) = r(0) - c(0) + s(1) - c + z(3;\ 1)$$
$$= 20 - 0{,}2 + 80 - 100 + 85{,}7$$
$$= 85{,}5$$
$$z(2;\ 1) = \max\{m(2;\ 1);\ s(2;\ 1)\}$$
$$= \max\{85{,}5;\ 85{,}5\} = 85{,}5$$

Decisão: Manter ou substituir

$$m(2;\ 4) = r(4) - c(4) + z(3;\ 5)$$
$$= 15{,}5 - 1{,}7 + 17$$
$$= 30{,}8$$
$$s(2;\ 4) = r(0) - c(0) + s(4) - c + z(3;\ 1)$$
$$= 20 - 0{,}2 + 30 - 100 + 85{,}7$$
$$= 35{,}5$$
$$z(2;\ 4) = \max\{m(2;\ 4);\ s(2;\ 4)\}$$
$$= \max\{30{,}8;\ 35{,}5\} = 35{,}5$$

Decisão: Substituir

Primeiro estágio

$$m(1;\ 3) = r(3) - c(3) + z(2;\ 4)$$
$$= 17{,}2 - 1{,}5 + 35{,}5$$
$$= 51{,}2$$
$$s(1;\ 3) = r(0) - c(0) + s(3) - c + z(2;\ 1)$$
$$= 20 - 0{,}2 + 50 - 100 + 87{,}9$$
$$= 57{,}7$$
$$z(1;\ 3) = \max\{m(1;\ 3);\ s(1;\ 3)\}$$
$$= \max\{51{,}2;\ 57{,}7\} = 57{,}7$$

Decisão: Substituir

Recuperação da solução ótima

No início do primeiro ano, a decisão ótima é substituir a máquina. No início do segundo ano recomenda manter ou substituir. Se a maquina for substituída, a nova maquina terá um ano de idade no início do terceiro ano, se for mantida, a máquina terá dois anos de idade. O processo continua até o quarto ano. Assim as políticas ótimas são: (Substituir, Manter, Manter e Substituir) ou (Substituir, Substituir, Manter e Manter). O custo total é $R\$\ 57700,00$.

3)

(a) Resolução

Condições iniciais

$$z(5,1) = 24$$
$$z(5,2) = 20$$
$$z(5,3) = 16$$
$$z(5,4) = 12$$

Quarto estágio

$$m(4,1) = r(1) - c(1) + z(5,2)$$
$$= 17 - 5 + 20$$
$$= 32$$
$$s(4,1) = r(0) - c(0) + s(1) - c + z(5,1)$$

$$= 18 - 4 + 24 - 30 + 24$$
$$= 32$$
$$z(4,1) = \max\{m(4,1); s(4,1)\}$$
$$= \max\{32; 32\} = 32$$

Decisão: Manter ou Substituir

$$m(4,2) = r(2) - c(2) + z(5,3)$$
$$= 16 - 6 + 16$$
$$= 26$$
$$s(4,2) = r(0) - c(0) + s(2) - c + z(5,1)$$
$$= 18 - 4 + 20 - 30 + 24$$
$$= 28$$
$$z(4,2) = \max\{m(4,2); s(4,2)\}$$
$$= \max\{26; 28\} = 28$$

Decisão: Substituir

$$m(4,3) = r(3) - c(3) + z(5,4)$$
$$= 14 - 7 + 12$$
$$= 19$$
$$s(4,3) = r(0) - c(0) + s(3) - c + z(5,1)$$
$$= 18 - 4 + 16 - 30 + 24$$
$$= 24$$
$$z(4,3) = \max\{m(4,3); s(4,3)\}$$
$$= \max\{19; 24\} = 24$$

Decisão: Substituir

$$s(4,5) = r(0) - c(0) + s(5) - c + z(5,1)$$
$$= 18 - 4 + 8 - 30 + 24$$
$$= 16$$
$$z(4,5) = \max\{s(4,5)\}$$
$$= \max\{16\} = 16$$

Decisão: Substituir.

Terceiro estágio

$$m(3,1) = r(1) - c(1) + z(4,2)$$
$$= 17 - 5 + 28$$
$$= 40$$
$$s(3,1) = r(0) - c(0) + s(1) - c + z(4,1)$$
$$= 18 - 4 + 24 - 30 + 32$$
$$= 40$$
$$z(3,1) = \max\{m(3,1); s(3,1)\}$$
$$= \max\{40; 40\} = 40$$

Decisão: Manter ou Substituir

$$m(3,2) = r(2) - c(2) + z(4,3)$$
$$= 16 - 6 + 24$$
$$= 34$$
$$s(3,2) = r(0) - c(0) + s(2) - c + z(4,1)$$
$$= 18 - 4 + 20 - 30 + 32$$
$$= 36$$
$$z(3,2) = \max\{m(3,2); s(3,2)\}$$
$$= \max\{34; 36\}$$
$$= 36$$

Decisão: Substituir

$$m(3,4) = r(4) - c(4) + z(4,5)$$
$$= 12 - 9 + 16$$
$$= 19$$
$$s(3,4) = r(0) - c(0) + s(4) - c + z(4,1)$$
$$= 18 - 4 + 12 - 30 + 32$$
$$= 28$$
$$z(3,4) = \max\{m(3,4); s(3,4)\}$$
$$= \max\{19; 28\} = 28$$

Decisão: Substituir

Segundo estágio

$$m(2,1) = r(1) - c(1) + z(3,2)$$
$$= 17 - 5 + 36$$
$$= 48$$
$$s(2,1) = r(0) - c(0) + s(1) - c + z(3,1)$$
$$= 18 - 4 + 24 - 30 + 40$$
$$= 48$$
$$z(2,1) = \max\{m(2,1); s(2,1)\}$$
$$= \max\{48; 48\} = 48$$

Decisão: Manter ou substituir

$$m(2,3) = r(3) - c(3) + z(3,4)$$
$$= 14 - 7 + 28$$
$$= 35$$
$$s(2,3) = r(0) - c(0) + s(3) - c + z(3,1)$$
$$= 18 - 4 + 16 - 30 + 40$$
$$= 40$$
$$z(2,3) = \max\{m(2,3); s(2,3)\}$$
$$= \max\{35; 40\} = 40$$

Decisão: Substituir

Primeiro estágio

$$m(1,2) = r(2) - c(2) + z(2,3)$$
$$= 16 - 6 + 40$$
$$= 50$$
$$s(1,2) = r(0) - c(0) + s(2) - c + z(2,1)$$
$$= 18 - 4 + 20 - 30 + 48$$
$$= 52$$
$$z(1,2) = \max\{m(1,2); s(1,2)\}$$
$$= \max\{50; 52\} = 52$$

Decisão: Substituir

(b) Resolução

Existem múltiplas políticas ótimas.
Política 1
Ano 1:Substituir
Ano 2: Manter
Ano 3: Substituir
Ano 4: Manter
Política 2
Ano 1: Substituir
Ano 2: Substituir
Ano 3: Manter
Ano 4: Substituir
Política 3
Ano 1: Substituir
Ano 2: Manter
Ano 3: Substituir
Ano 4: Substituir

(c) Resolução

O retorno máximo é de 52 mil reais.

(d) Resolução

A estratégia de substituir o trator a cada 2 anos pode ser ótima, mas não é a única política ótima possível.

Referências

1 SNELSON, B. Espelho infinito em um banheiro público. *In:* WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikipédia, 2006. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Infinity_mirror. Acesso em: 8 jun. 2026.

2 TORRISI, N. M. *Os coelhos do matematico Fibonacci*. 2023. Disponível em: https://ufabcdivulgaciencia.proec.ufabc.edu.br/2023/04/11/os-coelhos-do-matematico-fibonacci-v-6-n-4-p-1-2023/. Acesso em: 22 maio 2026.

3 JOÃO NUNO TAVARES, Â. G. Números de Fibonacci. *In:* WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikiciencias, 2012. Disponível em: https://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php/Ficheiro:Fibonacci.png. Acesso em: 23 maio 2026.

4 MARIO ROBERTO DURAN ORTIZ. Ponte Juscelino Kubitschek. *In:* WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikipédia, 2007. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ponte_Juscelino_Kubitschek. Acesso em: 24 maio 2026.

5 COLABORADORES DA WIKIPÉDIA. Teoria dos grafos. *In:* WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikipédia, 2008. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria_dos_grafos. Acesso em: 23 maio 2026.

6 COLABORADORES DA WIKIPÉDIA. Problema do caminho mínimo. *In:* WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikipédia, 2005. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Problema_do_caminho_m%C3%ADnimo. Acesso em: 24 maio 2026.

7 COLABORADORES DA WIKIPÉDIA. Sete pontes de Königsberg. *In:* WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikimedia, 2026. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Sete_pontes_de_K%C3%B6nigsberg. Acesso em: 27 ago. 2026.

8 ITENBERG, I.; GENKIN, S.; FOMIN, D. *Círculos Matemáticos: a Experiência Russa*. IMPA, 2017. ISBN 978-85-244-0310-1.

9 COLABORADORES DA WIKIPÉDIA. Richard E. Bellman. *In:* WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikipédia, 2014. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Richard_E._Bellman. Acesso em: 24 maio 2026.

10 COLABORADORES DA WIKIPÉDIA. Problema da mochila. *In:* WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikimedia, 2007. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Problema_da_mochila. Acesso em: 23 maio 2026.

11 TAHA, H. A. *Pesquisa Operacional*. Pearson Education, 2008. (8ª Edição). ISBN 9788576051503.

12 GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. Elsevier, 2005. ISBN 9788535215205.

Índice Remissivo

Aresta, 50

Collatz, 22
Conjectura de Collatz, 24

Fibonacci, 17, 19
Forma
    progressiva, 9
    regressiva, 9
Função
    recursiva, 6

Grafo, 50

Progressão
    aritmética, 8
    geométrica, 11

Sequência
    Collatz, 22
    Fibonacci, 17, 19
sequência de Fibonacci, 16

Vértice, 50

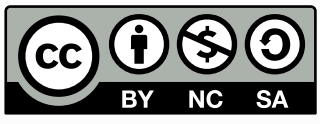
A Matemática do Ótimo: Introdução à Programação Dinâmica

Joaquim Lopes Júnior
Luis A. D'Afonseca

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET-MG
27 de agosto 2026

Esta apostila é produto do mestrado de Joaquim Lopes Júnior defendida em 2026 no Profmat do Cefet-MG O texto completo da dissertação pode ser baixado

Arte da capa: Imagem de Shubham Dhage baixada de Unsplash



Esta obra tem a licença Creative Commons "Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 4.0 Internacional".